

كتاب

التقوية في العلوم الهندسية
جزء رابع

١٧

رقم ٤٩

المكان رياضي وفلكي

الجزء الرابع
من كتاب التحفة البهية في الاصول الهندسية
(وهو مقرر تلامذة السنة الرابعة التجهيزية)

تأليف
المرحوم احمد بك عظيم
فاطر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة سابقا

قررت تطارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب لتلامذة مدرسة التجهيزية

(حقوق الطبع محفوظة لتطارة المعارف)

(الطبعة الثانية)
بالطبعة الكبرى الاميرية بيولا ق مصر المحمية
سنة ١٨٩٥
افرنجيه



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الجزء الرابع

في الاجسام المستديرة والقطاعات المخروطية والمنحنى البرمبي

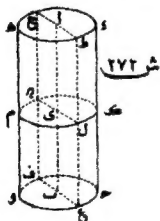
الباب الاول

(في الاجسام المستديرة)

الفصل الاول

(في الاسطوانة)

(٢٢٢) الاسطوانة القائمة هي جسم يتولد من دوران مستطيل مثل $ا ب ح د$ حول ضلع ثابت من أضلاعه $ا ب$ مثلا يسمى محور الاسطوانة (شكل ٢٧٢)



ضلعا المستطيل $ا د$ و $ب ح$ العمودان على المحور والثنان لا يزالان كذلك أثناء الدوران وبعدد برسمان دائرتين متساويتين مركزاهما $ا$ و $ب$ على المحور ومستوياهما عمودان عليه تسميان بقاعدتي الاسطوانة وأما ارتفاعها فهو المحور

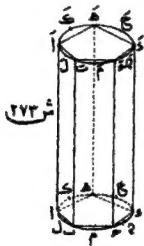
حيث ان كل نقطة مثل ك من نقط ضلع المستطيل د ه الموازي للحدود اب ترسم أثناء الدوران محيط دائرة مثل كل م و مركزه ي على المحور ومستوية عمود عليه ونصف قطره مساو لنصف قطر القاعدة أمكن أن يقال

كل مستوي موازي قاعدة الاسطوانة فإنه يقطعها في دائرة مساوية للقاعدة وأما المستوى القاطع لها المار بمحورها فإنه يقطعها في مستطيل مثل ح ط ع ف يكون ضعف المستطيل الاصل

(٢٢٢) السطح المخفي الذي يتولد من دوران الضلع د ه يسمى بالسطح الجانبي للاسطوانة ويمكن تصوير تولد هذا السطح على وجه العموم من حركة مستقيمة تسمى د ه على خط ثابت بالتوازي لاتجاه معين ويسمى المستقيم المتحرك براسم أو مولد السطح والخط الثابت بالدليل اذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون السطح المستوي حالة خصوصية من السطح الاسطواني

نظريية

(٢٢٤) المساحة السطحية الجانبية للاسطوانة تساوي حاصل ضرب محيط قاعدتها في ارتفاعها (شكل ٢٧٣)



السطح الجانبي للاسطوانة وان كان منحنيا ولا يتيسر مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكننا نتوصل للطلوب باعتبار النهاية التي يقرب منها السطح الجانبي لمشور منتظم امام رسوم داخل الاسطوانة أو خارجها متى زائد عدد أوجهه الى غير نهاية غير أنه لا يكون هذا الاعتبار حقيقيا الا انما برهنا على وجود تلك النهاية وعلى انها غير مرتبطة لانبوع معين

من أنواع المناشير المرسوسة داخل الاسطوانة أو خارجها ولا بقانون تضعيف الاوجه

فانك يقال اذا رسمنا داخل قاعدة الاسطوانة وخارجها شكلين منتظمين متقاربين في عدد الاشلاع و معدنا من رؤس هذين المضلعين مستقيمة موازية للحدود ومنتهية بمستوى القاعدة العليا فاما نتوصل بذلك الى منشورين منتظمين أحدهما داخل الاسطوانة والثاني خارجها ثم انار من زا بالمرزبين ح و ح لمحيطي الشكلين المنتظمين المذكورين وبالمرزبين

س و س السطحين الجانبيين المنشورين وبالمرز ع لارتفاعهما المشترك تحصل
(٣٠٨ تنبيه) ان $س = ع$ و $س = ع$

لكنه حيث قد علم مما سبق انه متى ازداد $ع$ الى غير نهاية فان $ع$ و $ع$ يقربان معاً من نهاية
مشتركة لهما محصورة دائماً بين أى مقدارين متقابلين من مقدارى $ع$ و $ع$ وغيره رتبة
لا بعدد $ع$ ولا بقانون تضعيفه وهى طول محيط الدائرة

وكذا حيث ان نهاية حاصل ضرب عدة مضارب مساوية لحاصل ضرب بنهايات مضاربه تحصل
نهاية $س =$ نهاية $ع \times ع$ ونهاية $س =$ نهاية $ع \times ع$

واذن فيكون للمقدارين $س$ و $س$ نهاية مشتركة $س$ ليست مرتبطة لا بعدد الاوجه
ولا بقانون تضعيفها وهى $س =$ محيط القاعدة $ع \times ع$

نتيجة - اذا جعل $س$ رمزاً لنصف قطر محيط القاعدة يكون قانون المساحة السطحية
الجانبيه للاسطوانة هو $س = ٢ ط س ع$

نظريه

(٣٣٥) المساحة الجسمية للاسطوانة تساوى حاصل ضرب قاعدتها في ارتفاعها

حجم الاسطوانة وان كان محدداً للسطح منحني ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام غير اننا نتوصل
الى المطلوب باعتبار النهايات فننشئ داخل الاسطوانة وخارجها منشورين منتظمين متعددين
في عدد الاوجه و نرمز لجميعها بالمرز $م$ و $م$ لقاعدتيهما بالمرز $ق$ و $ق$ ولجميع
الاسطوانة وقاعدتها بالمرز $م$ و $ق$ ثم نقول

من المعلوم ان $م$ اكبر من $م$ لاشتراكه عليه وأصغر من $م$ لانحصاره فيه لكنه يحدث (٣٠٨)
 $م = ق \times ع$ و $م = ق \times ع$

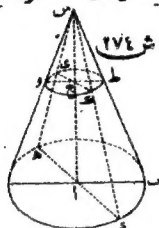
فاذا ازداد عدد الاوجه في هذين المنشورين الى غير نهاية فان $ق$ و $ق$ يقربان من نهاية
مشتركة $ق$ وهى قاعدتا الاسطوانة وحينئذ يكون للمقدارين $م$ و $م$ نهاية مشتركة $ق$ $ع$
ويكون حجم الاسطوانة $م$ المحصورين $م$ و $م$ هو تلك النهاية ويحدث $م = ق \times ع$

نتيجة - اذا ابدل $ق$ بمقداره تحصل قانون المساحة الجسمية للاسطوانة وهو $س = ط س ع$
نتيجة - يمكن تطبيق جميع ما ذكر من البراهين مع السهولة على أى اسطوانة مائلة قاعدتها
دائرة

القسطر الثاني

(في المخروط)

(٢٣٦) المخروط القائم هو جسم يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية مثل س أ ب حول ضلع



ثابت منه س ب مثلث من ضلعي القائمة يسمى محور

المخروط (شكل ٢٧٤)

الضلع الثاني أ ب للزاوية القائمة العمودى على المحور
والذى لا يزال كذلك أثناء الدوران وبعدده برسم دائرة
مركزها على المحور ومستوية مع عمود عليه تسمى بقاعدة
المخروط

وأما ارتفاعه فهو المحور

حيث إن أى نقطة مثل ط من نقطة الضلع س ب ترسم محيط دائرة مثل ط ك وى مركزها

ع على المحور ومستوية مع عمود عليه أمكن أن يقال

كل مستو مواز لقاعدة المخروط يقطعه فى دائرة

(٢٣٧) السطح المنحني المتولد من دوران مثلث س ب يسمى بالسطح الجانبي للمخروط وأما

نقطة المحور الثابتة س التى يمر بها الوتر دائما فتسمى رأس المخروط

ويمكن تصور تولد السطح المخروطى على وجه العموم من حركة مستقيم يمر دائما بنقطة ثابتة ويسمى

على خط ثابت أيضا فالمستقيم المتحرك يسمى براسم أو عمود لسطح المخروط وأما الخط الثابت فهو

الدليل

إذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون المستوى حالة خصوصية من

السطح المخروطى

تطبيقات

(٢٣٨) المساحة السطحية الجانبية للمخروط تساوى نصف حاصل ضرب محيط قاعدته فى حرفه

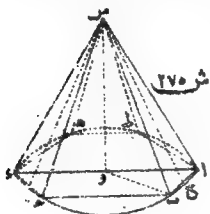
الجانبي (شكل ٢٧٥)

ولذا فإن السطح الجانبي للمخروط منحن ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكأنه

تلك شوصل الى المقصود بواسطة اعتباره النهاية التى يقرب منها السطح الجانبي لهرم منتظم

أما هرسوم داخل المخروط أو خارجة متى ترايد عددا وجهه الى غير نهاية

لكنه لاجل أن يكون هذا الاعتبار حقيقياً يجب أن يبرهن كاسبق في الاسطوانة على وجود تلك النهاية وإنها ليست مرتبطة لانبوع من أنواع الأهرام المرسومة داخل المخروط أو خارجه ولا بقانون تضيق الأوجه



ولذلك يقال إذا رسمنا داخل قاعدة المخروط شكلاً منتظماً عدداً أضلاعه ∞ ومحيطه $ح$ وخارجها شكلاً آخر منتظماً متعادلاً مع الأول في عدداً لأضلاعه ومحيطه $ح$ ثم وصل بين رأس المخروط وبين جميع رؤوس هذين الضلعين

بمستقيمات فإنه يتشكل من ذلك هرمان منتظمان أحدهما داخل المخروط والثاني خارجه وأوجه كل واحد منهما هي مثلثات متساوية ومتساوية الساقين والارتفاع المقدار في مثلثات الهرم الأول الداخل هو $س$ والارتفاع المقدار في مثلثات الهرم الخارج هو $ا$ فإذا رُغم بالرمز $س$ و $ا$ للسطحين الجانبين للهرمين المذكورين نحصل على مقتضى ما نقرر بمره (٣١١ نتيجة ١) أن

$$س = \frac{1}{2} ح \times س \quad و \quad ا = \frac{1}{2} ح \times ا$$

فإذا أخذ العدد ∞ في الزيادة إلى غير نهاية فنحن حيثان $ح$ يقرب بناء على هذا القرض من نهايته وهي محيط الدائرة التي نصف قطرها $ا$ وأن $س$ يقرب أيضاً من نهايته $س$ (لأن $س - ا$ فكلما أخذ ∞ في الزيادة قرب $ا$ من الصفر) فيقرب السطح $س$ بناء عليه من نهاية $س$

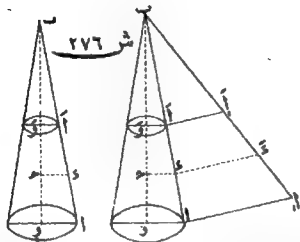
وكذا من حيث أنه بناء على القرض المتقدم يقرب $ح$ من عين النهاية التي يقرب منها $ح$ فتكون نهاية المقدارين السابقين واحدة وهي $س$ وهي كما لا يخفى غير مرتبطة لابتعاد الأوجه ∞ ولا بالقانون المتبع في زيادته إلى غير نهاية ويكون مقدارها هو $\frac{1}{2} محيط ا \times س$

نتيجة - إذا رمز بالرمز $س$ لنصف قطر القاعدة وبالرمز $ا$ للعرف الجانبى لسطح المخروط يكون قانون المساحة السطحية الجانبية للمخروط هو $س = ط ا$

نتيجه - إذا تم من وسط الحرف الجانبى مستو مواز قاعدة فإن نصف قطر دائرة القطع يكون مساوياً لضرورة إلى نصف قطر القاعدة وبذلك يكون محيط القطع مساوياً لنصف محيط القاعدة وبناء عليه فيمكن أخذ المساحة السطحية الجانبية للمخروط بواسطة ضرب حرف الجانبى في محيط الدائرة المتوسطة

نظريية

(٢٢٩) المساحة السطحية الجانبية للفرط الناقص تساوي نصف مجموع محيطي قاعدتيه في حرفه الجانبي (شكل ٢٧٦)



(انقطع الخروط بمستو مواز لقاعدته فان جزء الخروط المحصور بين المستوي القاطع والقاعدة يسمى مخروط ناقص ليكن $و$ رأس الخروط الناقص و $ب$ رأس الخروط الاصلى فاذا أقيم من نقطة $ا$ المستقيم $ا ب$ عمودا على $ا ب$ في مستو قائم أخذ البعد $ا ب$ مساويا لطول محيط $و ا$ و وصل $ب ا$

وأقيم أيضا من نقطة $ا$ نهاية حرف الخروط الناقص العمود $ا ا$ على $ا ب$ ومد حتى يلاق $ب ا$ فانه يتصل من الثلاث الحادثة التشابه

$$\frac{ا ا}{ب ا} = \frac{ب ا}{ا ا} = \frac{ا ا}{ب ا} = \frac{ب ا}{ا ا}$$

وحيث ان $ا ا$ مساو لمحيط الدائرة $و ا$ يكون $ا ا$ مساويا لمحيط $و ا$

اذ انظر هذا يقال حيث ان مساحة المثلث $ب ا ا = \frac{1}{2} ا ا \times ا ب$ فهو ان يكون السطح الجانبي للفرط الذي حرفه $ا ب$ وكذلك حيث ان مساحة المثلث $ب ا ا = \frac{1}{2} ا ا \times ا ب$ فهو ان يكون السطح الجانبي للفرط الذي حرفه $ب ا$ وانه عليه تكون مساحة شبه المنحرف $ا ا ا ا$ مساوية لمساحة السطح الجانبي للفرط الناقص وحيث ان مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع قاعدتيه المتوازيين في الارتفاع $ا ا$ فتكون المساحة السطحية الجانبية للفرط مساوية لنصف مجموع محيطي قاعدتيه في حرفه الجانبي وهو المراد

تبيين - اذ ان من نقطة $ا$ وسط الحرف $ا ا$ مستو مواز للمستوي القاعدتين فانه يحدد على سطح الخروط الناقص محيط دائرة يسمى بالمحيط المتوسط ثم اذا رهن كما سبق على أن طول هذا المحيط مساو للستقيم المتوسط $و ا$ لشبه المنحرف $ا ا ا ا$ ولوحظ أن $و ا$ مساو نصف مجموع قاعدتي شبه المنحرف فيكون المحيط الذي كور مساويا لنصف مجموع محيطي القاعدتين

الموازيتين للغروط الناقص واذن تكون المساحة السطحية الجائية للغروط الناقص مساوية لمحصل ضرب طول المحيط المتوسط في حرف الغروط الناقص الجائى

نتيجة ١ - اذا رمز بالحرف s للسطح الجائى للغروط الناقص و s و s' لنصفى قطرى القاعدتين و h لحرفه الجائى حدث $s = ط (s + s')$

* نتيجة ٢ - ويمكن الحصول على هذا القانون الاخير بواسطة الاعمال الحسابية فاذا دل a على الحرف الجائى للغروط الكلى و a' على حرف الغروط المحذوف و h على $a - a'$ حدث

$$s = ط s' - ط s' a' = ط (s - s' a')$$

* وحيث ان

$$\frac{s}{s - s'} = \frac{1}{1 - \frac{s'}{s}} \quad \text{يحدث} \quad \frac{s}{s - s'} = \frac{1}{1 - \frac{s'}{s}} = \frac{1}{1 - \frac{s'}{s}}$$

* ويكون $s = ط (s + s')$ وهو عين السابق

نظـرية

(٢٤٠) المساحة الجلمية للغروط تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه (شكل ٢٧٥)

حيث ان المخروط محدود بسطح منحن ويتحدد مقارنته مباشرة بوحدة الاجسام فاما توصيل الى الغرض باستعمال النهايات فنقول

اذا انشأنا داخل المخروط وخارجه هرمين m و m' منتظمين متعدين في عددا لاوجه وفرض أن q و q' رمزان لقاعدتهما و h رمز لارتفاعهما المشترك فمن المعلوم أن المخروط m يكون اكبر من m' لاحتوائه عليه واصغر من m'' لانحصاره فيه غير أن

$$m = \frac{1}{3} q \times h \quad \text{و} \quad m' = \frac{1}{3} q' \times h$$

فاذا ضوعف في عددا وجه الهرمين الى غير نهاية ولوحظ ما تقدم ذكره (بمزة ٢٣٨) من أن q و q' يفرقان عن القاعدة h فيكون حجمى الهرمين نهائى مشتركة هى $\frac{1}{3} q \times h$ وبناء عليه تكون مساحة المخروط المحصورة دائما بين الجمين m و m' هى تلك النهايات المشتركة

ويكون $m = \frac{1}{3} q \times h$ وهو المراد

نتيجة - اذا ابدلنا h بمقداره $ط s'$ حدث $m = \frac{1}{3} ط s' \times h$

نتيجه - ملاحظ ذكر من البراهين يمكن تطبيقه على أى مخروط مائل فاعند دائرة

نظريية

(٣٤١) المساحة المحيطة بالخرائط الناقص تكافئ ثلاثة مخاريط متحدة معه في الارتفاع وقواعد داهي قاعدة الخروط الناقص والوسط المتناسب بينهما يجب للوصول الى هذه النظرية البرهنة على أن الخروط الناقص يمكن تحويله الى هرم ناقص يكافئه يكون متحدا معه في الارتفاع وقاعداه تكونان مكافئتين لقاعدتي الخروط الناقص وذلك يقال اذا رسم مثلث في مستوى القاعدة السفلى للخروط الناقص يكون مكافئا لها ثم وصل بين رؤسها الثلاثة وبين رأس الخروط الكامل عسقيمت فانه تشكل من ذلك هرم ثلاثي متحد مع الخروط الكلي في الارتفاع ومكافئ له في القاعدة فيكون مكافئا له ثم اذا مد مستوى القاعدة العليا للخروط الناقص فانه يقطع الهرم في مثلث يشابه مثلث القاعدة فاذا رمز بالرمز $ط$ و $ق$ لهذين المثلثين وبالرمز $ن$ و $و$ لقاعدتي الخروط الناقص وبالرمز $ع$ و $ع$ لبعديهما عن الرأس تحصل

$$\frac{ط}{ق} = \frac{ع}{ع} = \frac{ط}{ق}$$

وحيث ان $ط$ و $ق$ متكافئان فرضا فيكون $ط$ و $ق$ كذلك واذن فيكون الهرم الاصغر والخروط الاصغر متكافئين وبناء عليه يكون الهرم الناقص والخروط الناقص متكافئين أيضا وحيث ان مساحة الهرم الناقص تساوي $\frac{1}{3} (ط + ط + ط) = ط$ (نتيجة ٣١٣) (فرض أن $ط$ يدل على ارتفاع الهرم الناقص) فتكون مساحة الخروط الناقص مساوية الى $\frac{1}{3} (ط + ط + ط) = ط$ وهو المراد

نتيجة ١ - اذا استعوض $ط$ و $ق$ بمقداريهما يحدث

$$م = \frac{1}{3} ط (ط + ط + ط) = ط$$

* نتيجة ٢ - ويمكن الوصول الى هذا القانون بطريقة حسابية فيقال حيث ان

$$\frac{ع}{ط} = \frac{ع}{ق} = \frac{ع}{و}$$

* فاذا جعلنا $م$ و $م$ رمزين لجمعي الخروطين الكامل والاصغر و $م$ رمزا للفرق بينهما

$$م = م - م = \frac{1}{3} ط - \frac{1}{3} ط = \frac{1}{3} ط$$

$$م = \frac{1}{3} ط = \frac{م - م}{م - م} = \frac{1}{3} ط (م + م + م)$$

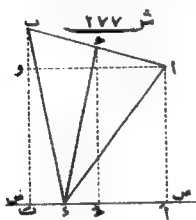
* وهو عين القانون السابق

الفصل الثالث

(في بعض سطوح وأجسام دورانية)

قائِدة

(٣٤٢) السطح المتولد من قاعدة مثلث متساوي الساقين حول محور ما برأسه يساوي حاصل ضرب محيط الدائرة التي نصف قطرها ارتفاع المثلث في مسقط القاعدة على المحور (شكل ٢٧٧)



ليكن AB قاعدة المثلث المتساوي الساقين ABC و S المحور الذي يدور المثلث حوله و $A'B'$ مسقط القاعدة AB على المحور S و C' مسقط نقطة C وسط القطع AB و AO مستقيما موازيا للمحور فمن المعلوم ان السطح المتولد من دوران المستقيم AB حول المحور AO يكون سطحاً مخروطياً كاملاً أو ناقصاً على حسب ما تكون نقطة A موجودة على المحور أو متباعدة عنه وعلى كلا الحالتين يتصل بناء على ما تقدم (٣٣٨) تنبيه و (٣٣٩) تنبيه أن سطح $AB = 2\pi \times AB \times \frac{C'C}{AB}$

غير أن المثلثين المتشابهين AOB و $C'S$ يؤخذ منهما أن

$$\frac{C'C}{AB} = \frac{C'S}{AS} \quad \text{أو} \quad \frac{C'S}{AS} = \frac{C'C}{AB}$$

ومنه يتصل

$$2\pi \times AB \times \frac{C'C}{AB} = 2\pi \times AS \times \frac{C'S}{AS}$$

واذن يكون سطح $AB = 2\pi \times AS \times \frac{C'S}{AS}$ وهو المراد

تنبيه - اذا وازى المستقيم AB المحور S تكون القائِدة بدئية

نظريّة

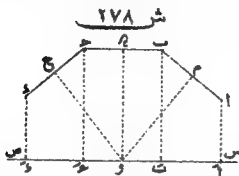
(٣٤٣) السطح المتولد من دوران جزء من محيط شكل منتظم حول محور ما بمركزه يساوي حاصل ضرب محيط الدائرة المرسومة داخله في مسقط جزء المضلع المذكور على المحور (شكل ٢٧٨) -

ليكن $ا ب ح$ جزء المضلع المعالم الذي مركزه $و$ من محور الدوران $و ا$ مسقط

جزء المضلع المنتظم $و م = و د = و ح$

نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فعلى مقتضى

الفائدة السابقة يتصل



سطح $ا ب = ط م$ و $ا ب \times ا ب$ و

سطح $ب ج = ط د$ و $ب ج \times ب ج$ و

سطح $ج د = ط ح$ و $ج د \times ج د$

ويجمع هذه المساويات على بعضها يتوصل الى السطح المتوالم من دوران جزء المضلع $ا ب ح$

ويحدث سطح $ا ب ح د = ط م \times ا ب$ وهو المراد

تنبيه - اذا كان جزء محيط المضلع نصف محيط مسدس منتظم وكان نصف قطر الدائرة المرسومة

عليه هو $ب$ ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله هو $ب$ فلان مساحة السطح المتوالم من

دورانه تساوي $ط ب \times ط ب$ او $ط ب \times ب$ غير أنه لما كان $ب = ط ب$ ٣٧

فتكون المساحة السطحية المذكورة مساوية الى $ط ب \times ط ب$ ٣٧ وبمثل ما ذكر يمكن الحصول

على مساحة كل سطح متوالم من دوران جزء من محيط أى مضلع منتظم سبق دراسته في الباب الثاني

من الجزء الثاني

تعريف

(٣٤٤) اذا اعتبرنا قوسا $ا ب$ من نصف محيط دائرة وكان $ا ب$ مسقطه على القطر

وقصورنا دوران هذا القوس حول القطر المذکور فان المستقيمين $ا ا$ و $ب ب$ المسقطين

للقنطين $ا$ و $ب$ نهايتي القوس المقروض يسميان ضرورتا دائرتين عموديتين على المحور

وأما القوس $ا ب$ فانه يرسم سطحه ضمنا محصورا بين مستويي هاتين الدائرتين يسمى منطقة

وحيث ان المنطقة هي جزء من سطح الكرة محصور بين مستويين متوازيين يسميان قاعدتيها

وأما المستقيم $ا ب$ الذي يقدر به البعدين المستويين فهو ارتفاعها

اذا امر أحد نهايتي القوس $ا ب$ بمحور الدوران بأن كان أحد المستويين المتوازيين مماسا للكرة

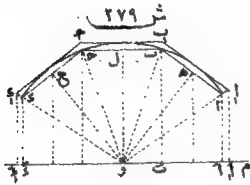
فان المنطقة تكون ذات قاعدة واحدة وتسمى في هذه الحالة طربوشا كرويا

واذا كبر القوس $ا ب$ حتى يبلغ نصف محيطه بأن كان مستويا القاعدتين مماسين للكرة فان المنطقة

تصير مساوية في هذه الحالة لسطح الكرة

نظريّة

(٢٤٥) مساحة المنطقة تساوي حاصل ضرب محيط دائرة عظيمة في ارتفاعها (شكل ٢٧٩)



ليكن $أ د$ القوس المولد للمنطقة و $أ د$ مسقطه على المحور $م ن$ فإذا أريد تقويم مساحة المنطقة يقال لما كان هذا السطح متحنيا ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لزمنا للوصول إلى المقصود أن نساك هنا عين ما سلكته من قبل فنعتبر النهاية التي يقرب منها السطح المتولد من محيط جزء من شكل منتظم مرسوم أما

داخل القوس المولد أو خارجه متى ضوعف في عدد أضلاعه $أ د$ عددا ضلعا $هـ$ وكان هذا الاعتبار حقيقيا يجب أن نبرهن كالمسبق على وجود تلك النهاية وانها ليست مرتبطة بنوع ما بالقانون المتبع في رسم المضلعات الداخلة والخارجة

فإذا كان $أ ب د هـ$ خطا مضلعا منتظما مرسوما داخل القوس $أ د$ عددا ضلعا $هـ$ وكان $أ ب د هـ$ خطا مضلعا آخر منتظما مشابه له مرسوما خارجه بواسطة مماسات موازية للأضلاع $أ ب$ و $ب د$ و $د هـ$ و $هـ أ$ الخ فيكون مسقط $أ ب د هـ$ هو الخط الثابت $أ د$ كالمعتنى وأما مسقط المضلع $أ ب د هـ$ فهو الخط المتغير $أ ب د$ الذي يفرق عن المسقط $أ د$ أما مجموع الخطين $أ ب د$ و $أ د$ أو بالفرق بينهما وحيث أن مسقط أي خط هو أقصر منه فالباقي يفرق إذن المسقط $أ د$ عن المسقط $أ ب د$ بكية أقل من $أ ب د$ غير أن كل واحد من $أ ب د$ و $أ د$ أقل من الفرق $أ ب د - أ د$ فيكون بداهة أقل من نصف ضلع من أضلاع المضلع الخارج وإذا نفي فرق $أ د$ عن $أ ب د$ بأقل من ضلع من أضلاع المضلع الخارج ولما كان هذا الفرق يزداد قربا من الصفر كلما زيد في تضعيف عدد الأضلاع فتكون إذن نهاية $أ د$ هي $أ د$

إذا قررر هذا وجعلنا $ن$ رمزا لنصف قطر الدائرة الراسمة للمنطقة و $م ن$ لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع المنتظم $أ ب د هـ$ و $م ن$ رمزا للسطح المتولد من هذا الخط المضلع المذكور و $م ن$ رمزا للسطح المتولد من محيط جزء المضلع المنتظم $أ ب د هـ$ نحصل على

مقتضى النظرية السابقة أن

$$م ن = ٢ ط م \times أ د \quad و \quad م ن = ٢ ط م \times أ ب د$$

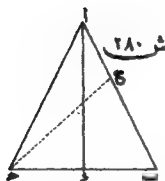
ومنى زيد فى العدد ٥ الى غير نهاية فان س و س يقربان من نهايتهما المشتركة ط ب و آ د
المحصورة بينهما الغير المرتبطة بالقانون الذى اتبع فى رسم المضلعات المنتظمة الداخلة والخارجة
الاتخذ عدد أضلاعها فى الزيادة وحيث ان تلك النهاية هى المنطقة فتكون مساحتها تساوى
ط ب \times آ د = ط ب \times ح وهو المراد

نتيجة - فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية النسبة بين أى منطقتين كالنسبة بين
ارتفاعيهما

نظريّة

(٢٤٦) المساحة المحيطة بالجسم المتولد من دوران مثلث حول محور خارج عنه وموجود معه
فى مستر واحد وماربأ حد رؤسهما تساوى حاصل ضرب السطح المتولد من الضلع المقابل لتلك
الرأس فى ثلث الارتفاع المقابل له

الحالة الاولى (شكل ٢٨٠)



نفرض أولا ان أحد أضلاع المثلث ب ح مثلا منطبق
على المحور فنزل من النقطتين ح و أ المودين ح ح و آ د
فالجسم المتولد من دوران المثلث ح أ ب يتركب ضرورة
من مخروطين ويحدث

$$\text{حجم ح أ ب} = \text{حجم ح أ د} + \text{حجم د أ ب}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ ط آ د } (ح + د) = \frac{1}{3} \text{ ط آ د } \times ح$$

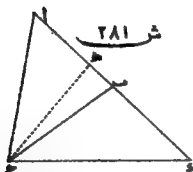
لكنه حيث كان الحاصلان ح \times آ د و أ ب \times ح متساويين دلالة كل واحد منهما
على شئ واحد وهو ضعف مساحة المثلث أ ب ح أمكن أن يوضع

$$\text{حجم ح أ ب} = \frac{1}{3} \text{ ط آ د } \times أ ب \times ح$$

ومن جهة أخرى حيث ان السطح المتولد من دوران الضلع أ ب هو سطح مخروطى ومساحته
تساوى ط آ د \times أ ب فبالاستعراض يحدث

$$\text{حجم ح أ ب} = \text{سطح أ ب} \times \frac{1}{3} ح \text{ وهو المراد}$$

الحالة الثانية (شكل ٢٨١)

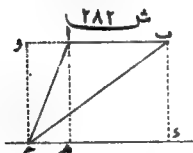


نفرض ان الضلع $ب$ غير منطبق على المحور وانما امتداد الضلع $أ ب$ المقابل للرأس $د$ يقابله في نقطة $د$ فيكون الجسم المتولد من دوران المثلث $أ ب د$ مساويا في هذه الحالة للفرق بين الجسمين المتولدين من دوران المثلثين $د أ د$ و $د ب د$ ويحدث

$$\begin{aligned} \text{جسم } أ ب د &= \text{جسم } د أ د - \text{جسم } د ب د \\ \text{سطح } أ د &\times \frac{1}{4} د ه - \text{سطح } ب د \times \frac{1}{4} د ه \\ \text{سطح } أ ب &\times \frac{1}{4} د ه \text{ وهو المطلوب} \end{aligned}$$

الحالة الثالثة (شكل ٢٨٢)

نفرض ان الضلع $أ ب$ المقابل للرأس $د$ مواز للمحور ففي هذه الحالة لا يتأتى تطبيق البرهنة المتقدمة لعدم موافقتها غير أنه يحدث

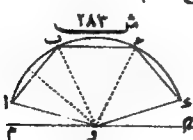


$$\begin{aligned} \text{جسم } أ ب د &= \text{جسم } أ د ه + \text{جسم } أ ه ب \\ &- \text{جسم } د ب د \text{ ويكون} \\ \text{جسم } أ ب د &= \frac{1}{4} ط د و \times د ه + \frac{1}{4} ط د و \times د ه \\ &- \frac{1}{4} ط د و \times د د \text{ أو} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} ط د و \times د ه + \frac{1}{4} ط د و \times د ه - \frac{1}{4} ط د و \times د د &= \frac{1}{4} ط د و \times د ه \\ \frac{1}{4} ط د و \times د ه + \frac{1}{4} ط د و \times د ه - \frac{1}{4} ط د و \times د د &= \frac{1}{4} ط د و \times د ه \text{ وهو المراد} \end{aligned}$$

نظريّة

(٢٤٧) مساحة الجسم المتولد من دوران قطاع قاعدته خط مضلع منتظم تساوى حاصل ضرب



السطح المتولد من قاعدته مضروباً في ثلث نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ٢٨٣)

ليكن $أ ب د$ الخط المضلع المنتظم قاعده القطاع و $د$ و $د$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فانه يمكن تحليل القطاع المذكور الى جملته مثلثات متساوية

الساقين ومتساوية وعلى مقتضى النظرية المتقدمة تحصل المساحة الججمية المتولدة من كل واحد منها وحاصل جمعها يدل على المساحة الججمية المطلوبة

$$\text{ججم و اء} = \text{سطح ا ب} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} + \text{سطح ب د} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و}$$

$$+ \text{سطح د هـ} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} = \text{سطح ا ب د هـ} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} \text{ وهو المراد}$$

نتيجة - المساحة الججمية للجسم المتولد من دوران نصف سدس منتظم حول قطره تكون بناء على ما ذكر

$$\text{م} = \text{سطح ا ب د هـ} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} = ٢ \text{ ط ب} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} = ٣٧ \text{ ط ب} = \text{ط ب}^2$$

وبمثل ما ذكر يسهل الحصول على مساحة كل ججم متولد من دوران جزء من مضلعات أخرى منتظمة يكون معلوم فيها أحد الاضلاع ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

تعريف

(٣٤٨) القطاع الكروي هو جزء من جسم الكرة يتولد من دوران قطاع دائري فهو شكلي اذن على منطقة

اذا اكل القطاع الدائري الى نصف دائرة فان القطاع الكروي يكون مساويا لجسم الكرة

نظرية

(٣٤٩) المساحة الججمية للقطاع الكروي تساوي حاصل ضرب المنطقة فاعده في ثلث نصف القطر (شكل ٢٨٣)

والوصول الى ذلك يقال ولوا أنه تعذر مقارنته مباشرة بوحدة الاجسام لانه محدد بسطح مضم لكنا مع ذلك نتوصل الى الفرض باستعمال النهايات

فقسم داخل القوس ا د خطا مضلعاً منتظماً ا ب د هـ عدد اضلاعه ٥ ونرسم آخر خارجيه متساوياً الاول ا ب د هـ (ولم يرسم منه الا الداخل فقط) ثم نجعل م رمز الججم المتولد من ا ب د هـ و م رمز الججم المتولد من ا ب د هـ و م رمز الججم المتولد من القطاع ثم نقول

ان الججم م اكبر من الججم م لاشتماله عليه واصغر من الججم م لانحصاره فيه لكنه يحدث على مقتضى النظرية السابقة ان

$$\text{م} = \text{سطح ا ب د هـ} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} \text{ و } \text{م} = \text{سطح ا ب د هـ} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و}$$

م (القطاع الكروي) = المنطقة قاعدة $\times \frac{1}{3} \text{ م}$ وهو المراد

$$m = \frac{r}{p} \text{ ط ب } \text{ع (ع ارتفاع المنطقة)}$$

(٣٥٠) الحلقة الكروية هي جزء من جسم الكرة يتولد من دوران قطعة دائرية محصورة بين قوسين ووتر

(٢٥١) المساحة المظللة الملتصقة بـ \overline{KO} روية تساوي سدس الدائرة التي نصف قطرها وتر القطعة مضروب في مسقط هذا الوتر على محور الدوران (شكل ٢٨٤)

ليكن B هي القطعة الدائرية حول المحور AC وليكن D وزتها H وهو مسقطه على المحور AC فالمعلوم ان الحجم المتولد من القطعة مساو للفرقين AB CD المتولد أحدهما من القطاع ABC ومن ACD وانهما من المثلث ABC CD AC

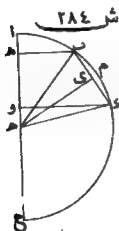
حجم د م = $\frac{r}{\rho} \times \rho \times h$ و (۳۴۹)

$$\text{حجم حویں} = \frac{r}{r_1} \times \overline{\text{ط حوی}} \times (r_1 r)$$

وباجراء الطرح يحدث

$$\text{هم م د} = \frac{r}{r'} \text{ ط } (y' - y) = \frac{r}{r'} \text{ ط } y' \times \text{هو}$$

$\frac{1}{7}$ طس \times هو وهو المراد



الفصل الرابع

(في الكرة)

نظرية

(٣٥٢) المساحة السطحية للكرة تساوي أربع دوائر عظام
والبرهنة على ذلك يقال حيث أنه تقدم (بمسرة ٣٤٤ تعريف) أن المنطقة تؤل الى سطح
الكرة متى آل القوس المولد لها الى نصف محيط دائرة أو آل ارتفاعها الى قطر الكرة فإذا أبدل
في قانون المنطقة ٢ ط ب \times ع (٣٤٥) الارتفاع ع بالمقدار ٢ ب تحصل سطح الكرة
 $= ٢ ط ب \times ٢ ب = ٤ ط ب^2$ وهو المراد

- * نتيجة - حيث قد علم مما سبق ان المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاث هو ثلث الكرة
- * (٢٦٩ نتيجة) فتكون مساحته تساوي $\frac{1}{4}$ ط ب 2 أعني نصف دائرة عظيمة
- * تنبيه - حيث ان مساحة المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاث قد علت بالنسبة للربع
- * المأخوذ وحده فيفسر ان معرفة النسبة الكائنة بين مساحة أى مضلع كروي وبين هذا
الربع متى علت زواياه

نظرية

(٣٥٣) المساحة المجمية للكرة تساوي أربعة أثلاث النسبة ط في مكعب نصف قطرها
أو تساوي سدس النسبة في مكعب قطرها
والبرهنة على ذلك يقال حيث أنه تقدم (بمسرة ٣٤٨) ان القطاع الكروي يؤل الى جسم
الكرة متى آل القطاع المأخوذ الى المولد الى نصف دائرة وفي هذه الحالة تؤل المنطقة قاعدته الى
سطح الكرة وبناء عليه انا أبدل في قانون القطاع المنطقة بـ سطح الكرة تحصل
جسم الكرة = سطح الكرة $\times \frac{1}{4} ط ب = ٤ ط ب^2 \times \frac{1}{4} ط ب = \frac{4}{3} ط ب^3$ أو $\frac{1}{4} ط ب^3$
وهو المراد

تعريف

- * (٣٥٤) الضلع الكروي هو جزء من جسم الكرة محصور بين نصفي دائرتين عظيمتين وكل
ضلع كروي تكون قاعدته شقة

نظريية

- * (٣٥٥) مساحة الضلع الكروي تساوي حاصل ضرب الشقة قاعدته في ثلث نصف القطر
- * وللهذه على ذلك يقال اذا جعل ١ وزا الزاوية الضلع الكروي منسوبة الى الزاوية
- * القائمة فانه يحدث بداهة أن

$$\frac{\text{الضلع الكروي}}{\text{حجم الكرة}} = \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \text{ أو } ١$$

$$\frac{\text{الضلع الكروي}}{٣} = \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \text{ط ١} = \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \text{ط ١} = \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \text{ط ١}$$

- * لكن المقدار ٤ ط ١ $\times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}}$ أو سطح الكرة $\times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}}$ يدل بداهة على سطح الشقة
- * فتكون مساحة الضلع الكروي مساوية الى الشقة $\times \frac{١}{٣}$ وهو المطلوب

تعريف

- * (٣٥٦) اذا وصل بين مركز الكرة ورؤس مضلع كروي بمستقيمت فانه يشكل من ذلك
- * ما يسمى بالهرم الكروي

نظريية

- * (٣٥٧) المساحة المجمية للهرم الكروي تساوي حاصل ضرب سطح قاعدته في ثلث نصف
- * قطر الكرة

- * الحالة الاولى - اذا كان الهرم ثلاثيا فانه يسهل البرهنة
- * أولا - على أن الهرمين الثلاثين المتماثلين متكافئان لا مكان تركبهما من اهرامات ثلاثية
- * متساوية ذات الوجهن المتساويين كما جرى ذلك في المثليين الكرويين
- * ثانيا - على أنه اذا تقاطع دائرتان عظيمتان في نصف كرة واحدة فالهرمان الحادان اللذان
- * فيهما زاويتان زوجيتان متساويتان مشتركان في الحرف يكون مجموعهما مساويا للضلع
- * الكرة المنسوبة اليه احدى الزاويتين الزوجيتين المذكورتين لان الهرم المماثل لاي الهرمين
- * المذكورين يكمل ضلع الكرة الذي يكون الهرم الثاني جزءا منه

* اذا تقررهنا وأعيدت البراهين التي سبق ايرادها عند تقويم المساحة السطحية للثلث الكروي (٢٧٦) على الهرم الثلاثي الكروي تحصل

$$\text{هرم ثلاثي كروي} = \frac{\text{ضلع } \alpha \times \text{ضلع } \beta + \text{ضلع } \gamma}{2} - \frac{1}{4} \text{ كرة}$$

* وعلى ما تقرّر (بمجرة ٣٥٥) يحدث

$$\text{هرم ثلاثي كروي} = (\text{شقة } 1 + \text{شقة } \beta + \text{شقة } \gamma - \text{شقة قائمة}) \times \frac{\pi}{3}$$

* وحيث ان الكمية الموجودة بين القوسين تدل على مساحة المثلث الكروي قاعدة الهرم

* الثلاثي (٢٧٦) يحدث

$$\text{هرم ثلاثي كروي} = \text{القاعدة} \times \frac{\pi}{3} \text{ وهو المطلوب}$$

* الحالة الثانية - اذا كان الهرم أيًا كان فانه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية وبأخذ

* مساحاتها وضمها الى بعضها يتوصل الى المطلوب

* نتيجة - اذا وصل بين مركز الكرة وجميع نقاط دائرة صغيرة بمسقيمت تكون من ذلك

* ما يسمى بالمخروط الكروي

* وبسبل البرهنة بطريق النهايات على أن المساحة الجسمية له تساوي حاصل ضرب قاعدته

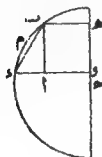
* في ثلث نصف القطر

نظريّة

(٣٥٨) المساحة الجسمية للقطعة الكروية تساوي مساحة الكرة التي قطرها ارتفاع القطعة

زائدًا مساحة الجسم الاسطواني المتصاع القطعة في الارتفاع وقاعدته نصف مجموع قاعدتي

القطعة (شكل ٢٨٥)



ش ٢٨٥

ليكن المطلوب تقويم المساحة الجسمية المتولدة من دوران شبه المخرف

هـ م و الذي أحد أضلاعه منحني حول المحور هـ و

يتفكك بـ ١ موازياً للمحور فالجسم المطلوب يكون مساوياً ضرورية

لمجموع الجسمين المتولدين أحدهما من القطعة الدائرية بـ م و وثانيهما

من شبه المخرف هـ م و فيحدث

$$\text{حجم م و} = \frac{1}{4} \pi \overline{ب م}^2 \times \text{هـ و} \quad (٣٥٩)$$

$$\text{حجم هـ م و} = \frac{1}{4} \pi (\overline{ب هـ} + \overline{م و} + \overline{ب هـ} \times \overline{م و}) \text{ هـ و} \quad (٣٥٩ \text{ نتيجة } ١)$$

وبالجمع يحدث

حجم القطعة = $\frac{1}{4} ط (ب د + ب ه + ب و + د ه + د و + ه و)$ $\times ه و$
ويؤخذ من المثلث القائم الزاوية ب ا د أن

$ب د = ه و + (د و - ب ه) = ه و + د و + د و - ب ه = د و + د و - ب ه$
وباستعاض ب د من القانون السابق بما يساويه يحدث

حجم القطعة = $\frac{1}{4} ط (ه و + د و + د و - ب ه) \times ه و$
ومع التحليل والاختصار يحدث

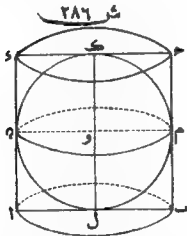
حجم القطعة = $\frac{1}{4} ط ه و + \frac{1}{4} ط (د و + ب ه) ه و$ وهو المراد

نتيجة - إذا انعدمت إحدى القاعدتين بأن كانت القطعة ذات قاعدة فقط فإن المساحة
الاجمعية لها تساوى الكرة التى قطرها ارتفاع القطعة زائد نصف الاسطوانة المتصلة مع القطعة
في القاعدة والارتفاع

نظريـة

(٣٥٩) نسبة سطح الكرة الى السطح الكلى للاسطوانة المرسومة عليها كنسبة بين العددين
٣ و ٢ والنسبة بين حجمها كنسبة بين العددين

المذكورين (شكل ٢٨٦)



ليكن م ل ك دائرة عظيمة و ا ب د مربع
مرسوما خارجها وتصورنا دوران كل من نصف الدائرة
ونصف المربع حول المحور ك ل فانه عندما ترسم نصف
الدائرة الكرة ترسم نصف المربع الاسطوانة

برهان الاول - حيث ان قاعدة الاسطوانة مساوية
دائرة عظيمة وارتفاعها مساو لقطر الكرة فتكون مساحتها

السطحية الجانبية مساوية الى ٤ ط ب و و يضم الى ذلك مساحة القاعدتين أو ٢ ط ب و تكون
المساحة الكلية لسطح الاسطوانة مساوية الى ٦ ط ب و واذاً يكون

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح الاسطوانة}} = \frac{٤ ط ب و}{٦ ط ب و} = \frac{٢}{٣}$$

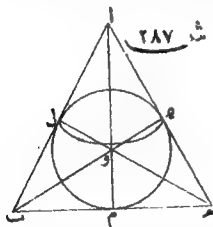
برهان الثاني - يقال ان المساحة الحجمية للاسطوانة تساوى ط_ق × ط_ق = ط_ق ط_ق والمساحة الحجمية للكرة تساوى $\frac{4}{3}$ ط_ق ط_ق ويكون

الكوة
الاسطوانة $\frac{4}{3} = 2 : \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ وهو المراد

تبيينه - اذا تصورنا جسما كثيرا السطوح من مسوا على الكرة أى أن جميع أوجهه مماسة لسطحها فان حجمه يتركب من اهرامات تكون رؤوسها مركز الكرة وقواعدها الالوجه المختلفة لكثير السطوح وأما ارتفاعها المشترك فهو مساو لنصف قطر الكرة واذن فيكون حجم كثير السطوح مساويا لسطحه مضربا في ثلث نصف القطر وبناء عليه تكون النسبة بين أحجام كثيرات السطوح المرسومة على الكرة كالنسبة بين سطوحها

نظريّة

- (٣٦٠) نسبة سطح الكرة الى سطح المخروط المتساوى الاطراف المرسوم عليها (أى الذى
- قطرها عدته مساو لاسمعه) كالنسبة بين العددين ٤ : ٩ والنسبة بين مجموعهما كالنسبة بين
- عن هذين العددين (شكل ٢٨٧)



- * ليكن Δ دالة عظيمة قدرسم عليها المثلث
 * المتساوي الاضلاع ABC ثم تصورنا دوران نصف
 * الدائرة ونصف المثلث معا حول القطر AM فانه عند
 * ما يرسم نصف الدائرة جسم الكرة يرسم نصف المثلث
 * ABC مخروطا متساوي الاطراف
 * برهان الاول - من المعلوم أن السطح الجانبي للخرطوط
 * متساوي طوله Δ \times h وباستعاض h بـ h و h بـ h

$$\frac{t}{A} = \frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح المخروط}}$$

- * وأما برهان الثاني وإن كان يمكن استنتاجه من تنبيه عمدة (٣٦٠) فغ ذلك نقول إن المساحة
 * المجمية للخروط $= \frac{1}{3} ط م \times ا م$ لكن $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ أو $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{3} ط م = \frac{1}{6} ط م$
 * أو $ا م = ٣ س$ وتكون مساحة حجم المخروط مساوية الى ٣ ط س أو $\frac{9}{4} ط س$
 * ويحدث $\frac{الكرة}{الخروط} = \frac{4}{9} : \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ وهو المراد

الفصل الخامس

تمرينات

- ١ - المطلوب تعيين نصف قطر قاعدة اسطوانة اذا كانت مساحتها السطحية الجانبية تساوى ٦٠ متر مربع وكان ارتفاعها مساويا ١٢٠ متر
- ٢ - اذا لم يطلد السطح الجانبى لاسطوانة قطر قاعدتها ٢٠ متر وارتفاعها ٨٠ متر مقدار سنتيمترين مكعبين من الذهب والمطلوب معرفة سمك طبقة الطلاء
- ٣ - ما يؤل اليه حجم الاسطوانة اذا ضوعف ارتفاعها أو نصف قطر قاعدتها
- ٤ - اذا دل العدد ١٩٢٦ على الثقل النوعى للذهب وأريد تصفيح عمود بصفايح من الذهب ارتفاعه يساوى ثلاثة أمتار ونصف قطر قاعدته يساوى ٢٠ متر فما مقدار زينة الذهب اللازم لذلك اذا كان سمك الصفايح يعادل ١٠٠٠٠ متر
- ٥ - المطلوب تعيين زينة الزئبق الموجود داخل اناء اسطوانى قطر قاعدته ٢٠ متر وارتفاع الزئبق فيه يعادل ٤٠ متر اذا كان الثقل النوعى للزئبق يعادل ١٣٦
- ٦ - اذا كانت أنبوبة من الزجاج وزن ٨٠ غراما وهى فارغة ومتى وضع فيها زئبق بارتفاع ٤٠ متر يبلغ وزنها ١٤٠ غراما والمطلوب معرفة قطر قاعدة الأنبوبة اذا كان الثقل النوعى للزئبق يعادل ١٣٥٩٨
- ٧ - اذا قطع مخروط ارتفاعه متران ومساحة قاعدته متر مربع بمستوى مواز قاعدته على بعد ٨٠ متر من رأسه والمطلوب معرفة سطح القطع
- ٨ - على أى بعد من رأس مخروط ارتفاعه متران ونصف قطر قاعدته ٤٠ متر يجب قطعه بمستوى مواز قاعدته ليكون نصف قطر القطع مساويا ٣٠ متر
- ٩ - ما يؤل اليه حجم مخروط اذا ضوعف ارتفاعه أو نصف قطر قاعدته

- ١٠ - إذا كان حجم مخروط يساوى ٦٠ متر مكعبا وارتفاعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب سطحه الجانبي
- ١١ - إذا كان نصف قطر قاعدة مخروط يساوى مترين ورضعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب حجمه
- ١٢ - إذا قطع مخروط ارتفاعه خمسة أمتار بمستوا وارتفاعه على بعد مترين من رأسه وكان نصف قطر القطع الحادث مساويا ٤٠ م. متر والمطلوب حساب حجمه
- ١٣ - إذا قطع مخروط ارتفاعه ستة أمتار ومساحتها الخلفية عشرة أمتار مكعبة بمستوا مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه والمطلوب حساب السطح الجانبي للمخروط الناقص
- ١٤ - على أي بعد من رأس مخروط حجمه يساوى ٣٨٧ متر مكعبا وارتفاعه ٢٠ متر يجب قطعه بمستوا مواز قاعدته لتكون المساحة الخلفية للمخروط المهدوف مساوية ٩٥ متر مكعبا
- ١٥ - إذا كان ارتفاع مخروط ناقص مترين ونصف قطر قاعدته السفلى ٧٣٠ م. متر ونصف قطر قاعدته العليا ٣٥٠ م. متر والمطلوب حساب السطح الجانبي للمخروط الكامل وحجمه
- ١٦ - المطلوب حساب السطح الحادث من دوران المستقيم $AB = ٥$ متر حول محور K قائم معه في مستوا واحد وكان بعد K عن A يساوي ٣ متر و B يساوي ٤ متر
- ١٧ - المطلوب حساب السطح الحادث من دوران محيط مثلث متساوي الاضلاع حول أحد أضلاعه $AB = ٥$ متر
- ١٨ - المطلوب حساب ارتفاع منطقة مساحتها تساوي دائرة عظيمة ونصف قطر الكرة التي هي جزء من سطحها مساو سبعة أمتار
- ١٩ - المطلوب حساب الحجم المتولد من دوران مثلث متساوي الاضلاع أحد أضلاعه $AB = ٥$ متر حول محور مار برأسه ومواز قاعدته
- ٢٠ - المطلوب حساب حجم القطاع الكروي إذا كانت مساحة المنطقة قاعدته تساوي مترا مربعا ونصف قطر الكرة مساويا مترا
- ٢١ - المطلوب حساب حجم المكعب المرسوم داخل الكرة التي نصف قطرها خمسة أمتار وبالعكس
- ٢٢ - ما يؤهل إليه سطح الكرة وحجمها إذا ضوعف نصف قطرها
- ٢٣ - المطلوب حساب سطح الشقة التي يعادل مقدار زاويتها ٢٨° ونصف قطر الكرة يساوي أربعة أمتار
- ٢٤ - المطلوب حساب زاوية الشقة إذا عادت مساحتها مترا مربعا وكان نصف قطر الكرة مساويا ٥٠ متر مربع

الباب الثاني

(في القطاعات المخروطية والمنحني البرعى)

* يطلق اسم القطاعات المخروطية على القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد

الفصل الاول

(في القطع الناقص)

تعريفات

(٣٦١) القطع الناقص هو محل النقط التي يكون مجموع بعدى كل واحدة منها عن نقطتين ثابتين فيه ثابت دائما (شكل ٢٨٨) النقطتان الثابتتان تسميان بالبورتين ورمز لهما هنا بالرمزين σ و σ'

بعد أى نقطة من نقط القطع الناقص عن أى واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بوريا ويرمز هنالصفى القطرين البورين لى نقطة بالرمزين σ و σ' والمقدار الثابت الدال على مجموع نصفى القطرين البورين لى نقطة بين ههنا بالمقدار a وأما البعد بين البورتين فيسمى بالمقدار $2c$

(٣٦٢) محاس القطع الناقص فى أى نقطة هونها بالاوزاع التي يأخذها قاطع متحرك مار بهذه النقطة وبأخرى تقرب منها شيئا فشيئا الى غير نهاية

المبحث الاول

(فى رسم القطع الناقص)

عملية

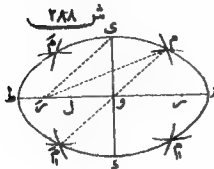
(٣٦٣) المطلوب رسم القطع الناقص

الطريقة الاولى - وهى رسمه نقطة فنقطة (شكل ٢٨٨)

(٤) جزء رابع

ليكن ϵ و ϵ' البورتين و α المجموع الثابت و $\epsilon = \epsilon'$ و وسط ϵ و ϵ' متساويين وكل منهما

يساوي أ فيكون النقطتان ϵ و ϵ' من نقط القطع الناقص لان



$$\epsilon + \epsilon' = \alpha \quad \epsilon + \epsilon' = \alpha \quad \epsilon + \epsilon' = \alpha$$

$$\epsilon + \epsilon' = \alpha \quad \epsilon + \epsilon' = \alpha \quad \epsilon + \epsilon' = \alpha$$

ثم نقيم من نقطة و عمودا غير محدود على المستقيم ϵ و ϵ'

ونجعل إحدى البورتين مركزا ونرسم محيط دائرة نصف

قطر مساو أ فيقطع العمود في النقطتين ϵ و ϵ' تكونان أيضا من نقط المنحنى لان

$$\epsilon + \epsilon' = \alpha \quad \epsilon + \epsilon' = \alpha \quad \epsilon + \epsilon' = \alpha$$

إذا جعل ب رمز البعد و ϵ حدث أ = ب + ج

ثم إذا فرضت نقطة مثل ل على المنحنى ϵ وجعلت نقطة ϵ' مركزا ونرسم محيط دائرة

نصف قطر مساو ط وجعلت بعد ذلك نقطة ϵ' مركزا ونرسم محيط دائرة أخرى نصف قطر

مساو هل فان هذين المحيطين يتقاطعان في نقطتين م و م تكونان من نقط المنحنى

ومتماثلتي الوضع بالنسبة للمستقيم ϵ

ثم إذا أبدل نصف القطرين ببعضهما مع عدم تغير المركزين فانا نتوصل أيضا إلى نقطتين جديدتين

م و م من نقط المنحنى متماثلتي الوضع أيضا بالنسبة للمستقيم ϵ ومتماثلتين للنقطتين

م و م بالنسبة للمستقيم ϵ وبإعادة مثل هذه العملية مرارا فانه يتوصل في كل مرة إلى

أربع نقط من نقط المنحنى متماثلة متني بالنسبة لكل واحد من المستقيمين ϵ و ϵ' فإذا

وصات جميع النقط المتحصلة بنقط فانه يشكل منحنى القطع الناقص المطلوب

نتيجه ١ - حيث ان جميع نقط المنحنى متماثلة متني بالنسبة لكل واحد من المستقيمين

ϵ و ϵ' فيسمى المستقيمان المذكوران من أجل ذلك بمحوري تماثل المنحنى

نتيجه ٢ - حيث ان الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعي $\epsilon \epsilon' \epsilon \epsilon'$ متساوية فيكون

متوازي الاضلاع وحيث ان قطريه ينصفان بعضهما في نقطة و فتكون هذه النقطة وسطا

لجميع أوتار المنحنى المار بها ولذا تسمى هذه النقطة بمركز المنحنى

نتيجه ٣ - حيث ان انتخاب نقطة ل على المحور ϵ يستلزم تقاطع محيطي الدائرتين

الذين مركزاهما ϵ و ϵ' فيجب أن يكون البعدين المركزين ϵ و ϵ' أصغر من مجموع نصفي

القطرين ٢ ١ وأكبر من فاضلهما أما الشرط الأول فهو محقق لان $a < c$ وحينئذ فلنحقق الشرط الثاني يجب أن يكون $c > a$ أعني انه يجب أخذ نقطة ل بين النقطتين a و c ومن هنا يعلم مقدار نصف القطر البوري بتغيرين المقدارين $a - c$ و $a + c$

نتيجة - يمكن أن يستنتج مما ذكر أن $ه ط$ هو المحور الأكبر للقطع الناقص وان $ي د$ هو محوره الاصغر وذلك لانه يؤخذ من المثلث $م د ه$ أن

$$\begin{aligned} \overline{م د} + \overline{م ه} &= \overline{د ه} + \overline{م د} \text{ أو } \overline{م د} = \overline{م ه} - \overline{د ه} \text{ أو } \\ \overline{م د} &= \overline{م ه} + \overline{د ه} - \overline{م ه} = \overline{م ه} - \overline{م د} - \overline{د ه} = \overline{م ه} - \overline{م د} - \overline{د ه} \\ \text{فإذا جعل } د ه & \text{ رمزاً للفرق بين نصفي القطرين البورين أمكن أن يوضع} \end{aligned}$$

$\overline{م ه} = \overline{ا د} + \overline{د ه} = \overline{ا د} + \overline{م د} = \overline{ا م}$ واذن يكون $\overline{م د} = \overline{د ه} + \overline{م ه}$ ثم يقال حيث ان النهاية العظمى للكعبة $ه$ هي $د$ فتكون النهاية العظمى للقدر $م$ هي $ا$ وكذا حيث ان النهاية الصغرى للكعبة $ه$ هي صفر فتكون النهاية الصغرى للقدر $م$ هي $د$ و $ه$ و $ط$ و $ي$ و $د$ بالمحور الأكبر و $ي د$ بالمحور الاصغر وتسمى النقط $ه$ و $ط$ و $ي$ و $د$ بالرؤس

الطريقة الثانية - وهي طريقة رسمه دفعة واحدة

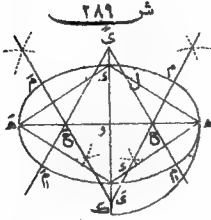
إذا أخذنا خط طوله ٢ ١ وثبت طرفاه في البورين $ا$ و $د$ وشد بواسطة سن قلم راسم يتحرك فانه يتشكل من ذلك القطع الناقص المطلوب

وذلك لان مجموع نصفي القطرين البورين لكل نقطة من نقطه مساو $ا د$ وهذه طريقة يكثر استعمالها على الارض دون الرسم على الورق لعدم امكان الوصول بواسطتها الى رسم النقط المجاورة للمستقيم المار بالبورين مع الضبط الكافي حيث انه عندما يتماس جزا الخط فان أحدهما لا يكون مستقيماً لزيادة على ذلك فانه متى رسم نصف القطع الناقص يحتاج الامر الى رفع القلم الراسم ونقل الخط الى الجهة الثانية للبورين لرسم النصف الثاني منه

غير انه يسهل تصحيح الضرر الاخير بواسطة استعمال خط دائري طوله مساو $ا د + د ه$ بان يثبت ا برتان في البورين ويحاط بهما الخط المذكور ويشد شدًا مناسباً بواسطة سن القلم الراسم ويحرك حتى يتم رسم القطع الناقص

نتيجة - اذا اتخذ البورتان $ا$ و $د$ فان المحل الذي يرسمه القلم يكون محيط دائرة وحينئذ فالدائرة هي قطع ناقص بورتاه متعادلتان

الطريقة الثالثة - وهي طريقة تقريبية (شكل ٢٨٩) يمكن أن يتوصل بواسطتها أقواس دوائر متقاطعة إلى رسم شكل تقرب صورته من القطع الناقص



فإذا كان $و هـ = ا$ و $د = ب$ نصفي القطرين البوريين للقطع الناقص المراد رسمه $د و$ على استقامته وبنؤخذ منه البعد $د ك = و هـ$ ثم يؤخذ $د ل = د ك = ا - ب$ ويقام العمود $م ي$ على وسط المستقيم $هـ ل$ ثم يعمل كذلك على المستقيم $د هـ$ ويتم بمثل ذلك المعين $ي ح ي ع$ وقد أضلاعه على استقامتها ثم نجعل كل واحد من النقطتين $ي و$ مركزاً ونصف قطر مساو

$ي د$ يرسم قوساً الدائرتين $م م$ و $م د م$ ونجعل أيضاً النقطتان $ح و$ مركزين ونصف قطر مساو $م$ يرسم القوسان $م م$ و $م م$ فميران تقريباً بالنقطتين $هـ و هـ$ ولا يكون الشكل الحادث هو القطع الناقص المطاوب وإنما يفرق عنه بقليل

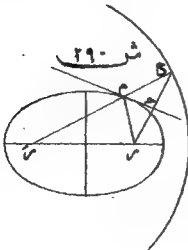
المبحث الثاني

(في بعض نظريات مهممة)

نظرية

(٣٦٤) القطع الناقص هو محل النقط المتساوية البعد عن نقط محيط دائرة وعن نقطة ثابتة

فيه (شكل ٢٩٠)



لتكن $م$ إحدى نقط القطع الناقص الذي يورثناه $س و س$ وليكن $ا ب$ مجموع نصفي القطرين البوريين لها بحيث يكون $م س + س ح = ا ب$ فيج $س م$ على استقامته وتأخذ عليه البعد $م ح = م س$ فالنقطتين $س ح$ يكون مسلويا $ا ب$ واذن فهو ثابت المقدار وتكون نقطة $ح$ موحدة على محيط دائرة نصف قطرها مساو $ا ب$

ومركزه ϵ وأما نقطة m فهي على بعد واحد من هذا المحيط ومن نقطة ϵ وهو المراد بتعيينه - الدائرة ϵ تسمى بالدائرة الدليلية للبوقة ϵ وأما الدائرة الدليلية للبوقة ϵ فهي التي مركزها ϵ ونصف قطرها ϵ

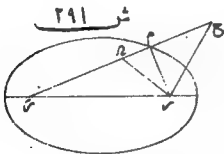
نتيجة ١ - ينبثق من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص نقطة فنقطة متى علم بوتراته ومجموع نصفي القطرين البوريين a لانه اذا رسم نقطة a مثلا الدائرة الليلية لنقطة b ووصل بين نقطة c مثلا احدى نقط محيط الدائرة وبين نقطة b بمستقيم ثم اقيم العمود cm على وسط هذا المستقيم فانه يقابل المستقيم ab بين b و c في نقطة تكون احدى نقط القطع الناقص المطلوب

وسيشاهد فيما يأتي أن العمود γ م يكون مماساً لمخني القطع الناقص في نقطة μ وحيتنذ فيكون لهذه الظرف فائدة أخرى مهمة وهي تعيين نقطة من نقط المماس

نتيجة ٢ - وينتج من طريقة رسم القطع الناقص هذه ان نقط المحنى متمثلة الوضع بالنسبة لكل من المستقيمين ss' والمستقيم العمود على وسطه حيث يمكن تغيير دور البورتون

نظـمـية

(٢٦٥) كل نقطة مفروضة في مستوى القطع الناقص يكون مجموع بعديهما عن بؤرتيه أكبر أو أصغر من المجموع الثابت ١٢ على حسب ما تكون هذه النقطة خارجة عن منحنى القطع الناقص أو داخله فيه (شكل ٢٩١)



أولاً - لنكن ϵ نقطة خارجة عن المعنى
فصل ϵ, ϵ و ϵ, ϵ و ϵ, ϵ فيحدث (٢٠ تنية)
 $\epsilon + \epsilon < \epsilon + \epsilon$ أو $\epsilon < \epsilon$
ثانياً - لنكن ϵ نقطة داخل المعنى فصل
 ϵ, ϵ و ϵ, ϵ و ϵ, ϵ ثم نخذ ϵ على استقامته

ثانياً - لتكن ω نقطة داخل المصنف فنصل ω ، ω ، ω ثم نعد ω على استقامته

علیہ

(٣٦٦) المطلوب تعيين نقط تقاطع مستقيم EF بخني القطع الناقص الغير للرسوم (شكل ٢٩٤)

تسكن ، و ، بريق القطع الناص ، و المستقيم المعالم ، و ١٢ مجموع نصف القطر من المورين

فإذا فرض أن المسئلة محاولة وان م هي إحدى

نقط تقاطع المنحنى بالمستقيم بحيث يكون $m \neq 0$

$$+m' = r \text{ اغذ } m \text{ على استقامته بقدر}$$

مط = م و حينئذ يكون معرفة وضع نقطة

ط كافي لحل المسئلة أى لتعين م وللوصول الى

ذَلِكَ بِمَا

من: المعلوم أولاً أن هذه النقطة توجد على الدائرة

الدلالة للمرة ، وثباتها لو حلت نقطة م

مرکز اور سم محبط دائرة نصف قطر مساو م ط فان هذا المحط ممس الدائرة الدليلية في نقطة ط

وعبر نقطة α وحصلت فقد آل تعين نقطة ط الى حل المسئلة الآتية وهي

المطلوب غير محيط دائرة عم نقطة γ المعلومة ويكون مماسا لمحيط دائرة معلومة بحيث يكون

مركزه موجود داخل مستقيم معلوم كذلك عن النقطة ع المائلة لنقطة د بالنسبة للمستقيم

المعلوم فإن هذه النطقة يجب أن تكون موجودة على المحيط طر واذن فقد آل الامر الى حل

المسئلة الاتية وهى (١٥٦)

المطابق تمرر محيط دائرة بنقطتين معلومتين وليس محيط دائرة معلومة

ولحل هذه المسئلة مركز في نقطة \rightarrow الاختيارية ورسم محيط دائرة يمر بالنقطتين ع و ح

و. قطع شريط الدائرة المعلومة في النقطتين ك و ل ثم اذا وصل كل واحد من هاتين النقطتين بقطعة مستقيمة إلى مركز الدائرة فكل من القطعتين المتولدتين من هاتين النقطتين إلى مركز الدائرة متساويتان.

٥) المستقيم r ، ثم مدمامماسان للدائرة المعلومة فان نقطتي التماس $ط$ و $ط'$ تعين

ممانعتا تقاطع المستقيم d بالخط h مني وصل بين كل واحدة منها والمرتبة n مستقيم

تنبيه - حيث ان نقطة r هي داخل الدائرة الدالة فلا يمكن حينئذ ان تكون المسئلة ممكنة

أي لا يمكن: أن يكون المستقيم CD قاطعاً للمحني إلا إذا كانت نقطة C داخل الدائرة الدلالية

أوعلى محيطها

ففي الحالة الأولى تأتي رسم المماسين ϕ و ϕ' وذلك بوجدنقطتان للتقاطع م م

وفي الحالة الثانية تكون نقطة C هي نفس نقطة التماس وذلك نظراً للمماسان على بعضهما

ويتحدد نقطتا التماس مع أفاقي نقطة C المذكورة ونساعليه يكون المستقيم CD قاطعاً للمحور.

في نقطتين متحدتين معا أي محاسله

نتيجة - حيث انه لا يمكن أن يمد من نقطة σ الخارجة عن محيط الدائرة الاعمالان له
 $\sigma \tau$ و $\sigma \rho$ فلا يمكن اذن للمستقيم أن يقابل محيط القطع الناقص الا في نقطتين وبذلك
 يكون القطع الناقص محدباً

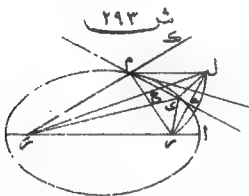
المبحث الثالث

(في تماس القطع الناقص)

نظريــــــــــــــــة

(٢٦٧) تماس القطع الناقص في نقطة ما ينصف الزاوية الواقعة بين أحد نصفي القطرين
 البورين لنقطة التماس وامتداد نصف قطرها

البورى الثانى (شكل ٢٩٣)



ليكن م τ قاطعاً للخطى ماراً بنقطة م وبأخرى
 قريبة جداً منها فإذا عينا نقطة ل المائلة الى σ
 بالنسبة للقاطع م τ ووصلنا بيناهما بنقطة σ
 بالمستقيم ل σ وكانت σ نقطة تقابل هذا
 المستقيم بالقاطع م τ حدث $\sigma \tau = \sigma \rho$

وحيث ان النقطتين م و τ متمازتان عن بعضهما فتكون نقطة σ ممثلة بالاقبل عن
 احدهما τ مثلاً فيحدث

$$\sigma \tau > \sigma \rho \text{ لى } \sigma \tau > \sigma \rho \text{ لى } \sigma \tau > \sigma \rho$$

واذن فتكون نقطة σ متمازدة أيضاً عن نقطة م وموضوعة داخل القطع الناقص ضرورة بين
 م و τ

اذا تقررهذا يقال حيث ان القاطع منتصف للزاوية المتكونة من σ وامتداد $\sigma \tau$ فاذنا
 قريب اذن نقطة τ من نقطة م فان القاطع يقرب نحو المستقيم م τ المتصف للزاوية
 المتكونة من المستقيم م τ ومن امتداد $\sigma \tau$ وحينئذ فيكون التماس في نقطة م الذى هو
 على مقتضى التعريف نهاية لاوزاع القاطع المتحرك متساوى الميل على نصفي القطرين البورين
 لهذا النقطة وهو المراد

ثانية - وينتج من ذلك أما إذا اريدتمدعاس لثمن القطع الناقص من نقطة مفروضة عليه فانه يكون مد المستقيم النصف الزاوية الواقعة بين أحد ضلعي القطرين البورين لهذه النقطة وامتداد نصف قطرها الثاني

نظريّة

(۳۶۸) محل مسافت بورق القطع الناقص على أساسه هو محيط دائرة مركزه من مركز القطع الناقص ونصف قطره نصف محوره الاكبر

(شکل ۲۹۴)

ليكن m نقطة تماس المستقيم U_1 بالقطع الناقص فإذا أثرنا من نقطة m العمود U_1 على المماس U_1 ومده حتى يتلاقى مع المستقيم U_2 فإن الزاوية $U_1 m U_2$ تكون مساوية للزاوية $U_1 m$ كما تقدم في النظرية السابقة ويكون المثلثان $U_1 m U_2$ و $U_1 m$ متساويين

للساواة ضلع ومجاورتيه من الزوايا من أحدهما للنظر هـ من الثاني واذاً يكون $م ط = م ر$
 و $م ط ي$ و بناء عليه يكون $م ط = م ر + م ر = ١٢$

إذا تقرر هذا يقال حيث كانت نقطة Y وسط المستقيم PA ونقطة Z وسط المستقيم BA فيكون المستقيم YZ و نصف المستقيم PA أو نصف PA أعني يكون مساوياً للضلع AB الثابت وحينئذ يكون محل نقطة Y هو محيط دائرة مركزه Z ونصف قطره نصف PA وهو AB

علمية

(۳۶۹) المطلوب بعد خمس انقطع ناقص معلوم مواز لاجزاء معلوم مع تعيين نقطة تماسه به
(شكل ۳۶۹)

ليكن الاتجاه المعلوم \vec{e} ونفرض ان المسئلة تحلولة وان \vec{e} هو المماس المطلوب الموازي للاتجاه \vec{e} وان M هي نقطة التماس فنصل M ونعد حتى يلاقى الدائرة الدلييلة للبوقة M في نقطة P وحينئذ اذا قطع وضع نقطة P فاننا نتوصل الى حل المسئلة فلانا ومطابقا M P

فان الثلثين ط م و ي م ، يجب أن يكونا متساويين لتساوي زاوية والضلعين المحيطين بها من أحدهما لنظائرهما من الثاني واذن يكون Γ ط عمودا على Γ ي أو على Γ و بناء عليه فتبتين نقطة ط بتقاطع مستقيم معين بمحيط دائرة ومتى علت فانها تبعتين نقطة م أيضا في تقاطع Γ ط مع العمود المماس على Γ وحيث انها توجد نقطة أخرى ط' مناسطة لنقطة ط فموجدان للمسألة حلان

تبيينه - ويمكن الوصول الى حل هذه المسئلة بالبحث عن وضع نقطة γ الكائن في تقاطع المائرة التي قطرها \odot مع العمود النازل من نقطة α على الاتجاه المعلوم α لان من ثم تعين وضعها تعين ايضا وضع المماس $\gamma \alpha$ وأما نقطة التماس فانها تعين بواسطة مد $\alpha \gamma$ حتى يقابل الدائرة الدليلية في نقطة β ثم وصل $\beta \alpha$ وبواسطة تعيين نقطة β التي هي النقطة الثانية لتقابل العمود $\beta \alpha$ بمحيط المائرة الذي قطره \odot يمكن الوصول الى حل ثان للمسئلة ويمكن الوصول الى هذا الحل الثاني اذا أجريت على البورة α اعمال مثل التي أجريت على البورة α

نتيجة - وبما يسهل مشاهدته هو أن نقطتي التماس موجودتان على نهايتي قطر القطع الناقص ممّ وذلك لأن الشكل ممّ ممّ متوازي الاضلاع لتساوي أضلاعه المتقابلة

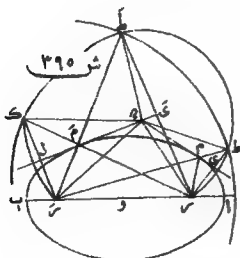
علمية

(٣٧٠) المطلوب غرر مما ساق لقطع الناقص من نقطة \odot الخارجة عنه (شكل ٢٩٥)

نفرض ان المسئلة تحلولة وان \mathcal{M} هو المماس
المطلوب تعيينه وان \mathcal{M} هي نقطة تماسه المطلوب
البحث عنها أيضا فاذا وصل \mathcal{M} و \mathcal{M} ومد على
استقامته وأخذ $\mathcal{M} = \mathcal{M}$ يظهر أن معرفة
نقطة \mathcal{M} كافية لتعيين نقطة \mathcal{M} فتعتبر هاذن
كأنها النقطة المطلوبة

وحيث أن $\sigma = \tau$ أفتوجد نقطة ط
على الدائرة المسلسلة للبوابة σ ومن جهة أخرى

حيث ان $\frac{1}{2}$ منصف الزاوية α μ فيكون عمودا على وسط المستقيم μ قاعدة
الثلث المتساوي الساقين α μ ويكون $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ μ وذلك توجد نقطة μ على



محيط الدائرة الذي مركزه \odot ونصف قطره \odot واذن فتوجد في تقاطع محيطي دائرتين معلومتين ولما كان هذان المحيطان يتقاطعان دائماً في نقطتين \odot و \odot فتقبل المسئلة اذن حلين \odot م و \odot م

تنبيه - من المفيد مناقشة شروط امكان حل هذه المسئلة فنقول من المعلوم ان امكان حل المسئلة يتوقف على تقاطع المحيطين بمعنى أن يكون البعدين مركزيهما \odot أصغر من مجموع نصفي القطرين \odot ١٢ و \odot ١٢ وأكبر من فاصلهما أولاً - اذا لم تكن نقطة \odot على المستقيم \odot فانه يتأق وجود المثلث \odot \odot ويحدث

$$\odot > \odot + \odot > \odot + \odot$$

ثانياً - اذا وجدت \odot خارج القطع الناقص على امتداد \odot تحصل

$$\odot = \odot \pm \odot > \odot + \odot$$

وبناء عليه يكون الشرط الاول محققاً دائماً كلما كانت نقطة \odot خارجة عن \odot

ثالثاً - اذا كانت \odot خارجة عن القطع الناقص وكان $\odot < \odot$ فن المعلوم أن

$$\odot + \odot < \odot \text{ أو } \odot < \odot - \odot$$

رابعاً - اذا كان $\odot < \odot$ فان النقطة تكون خارج القطع الناقص ضرورة لانه يحصل بدهاة $\odot + \odot < \odot$ فاذا لم تكن على امتداد \odot تحصل من المثلث \odot أن

$$\odot < \odot - \odot < \odot - \odot$$

خامساً - اذا وجدت \odot على امتداد \odot مع فرض أن $\odot > \odot$ ١٢ تحصل

$$\odot = \odot \pm \odot > \odot - \odot$$

وبالجملة فكلما كانت \odot خارجة عن القطع الناقص فان المحيطين يتقاطعان ويكون للمسئلة حلان

سادساً - اذا كانت \odot على القطع الناقص تحصل $\odot = \odot - \odot$ وهذا يدل على ان محيطي الدائرتين يتماسان وبذلك لا يكون للمسئلة الا حل واحد

سابعاً - اذا كانت \odot داخل القطع الناقص تحصل $\odot > \odot - \odot$ وهذا يدل على تباعد المحيطين في الداخل وبنا لا يكون للمسئلة حلول مطلقاً

نظـرية

* (٢٧١) المستقيم الواصلين نقطة تقاطع مماسين للقطع الناقص وبين إحدى بورتيه
 ينصف الزاوية الواقعة بين نصفي القطرين البورين الواصلين بين نقطتي التماس والبويرة
 المذكورة (شكل ٢٩٥)

* ليكن م د م و د م م مماسي القطع الناقص الخارجين من نقطة د والمطلوب البرهنة
 على أن المستقيم د م منصف للزاوية م د م يقال من المعلوم أن النقطتين ط و ط
 المتصلتين من الأعمال التي أجريت في المسئلة المتقدمة هما متماثلتان بالنسبة للمستقيم
 د م أوصل بين المركزين فإذا دارا المثلث د م ط حول د م فإن نقطة ط تنطبق
 على ط وتقع الزاوية ط م د على الزاوية د م ط وتكونان متساويتين وهو المطلوب

نظـرية

* (٢٧٢) الزاويتان الواقعتان بين مماسي القطع الناقص الخارجين من نقطة واحدة وبين
 المستقيمين الواصلين من هذه النقطة إلى البورتين متساويتان (شكل ٢٩٥) أعني أن
 زاوية $\text{م د م} = \text{م د م}$

* وللبرهنة على ذلك يقال إن المثلثين د م ط و د م ك متساويان لتساوي أضلاعهما
 الثلاثة المتناظرة فيهما لأن $\text{د م} = \text{د م}$ و $\text{ط م} = \text{ك م}$ و $\text{أ م} = \text{أ م}$ و $\text{د م} = \text{د م}$
 ومن تساويهما ينتج أن زاوية $\text{ط م د} = \text{زاوية د م ك}$ فإذا طرحنا منهما الزاوية
 المشتركة م د م تكون الزاويتان ط د م و م د ك متساويتين واذن يكون
 نصفاهما م د م و م د م كذلك وهو المراد

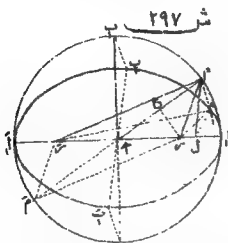
نظـرية

* (٢٧٣) محل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على قطع ناقص هو محيط دائرة متعمد معفي المركز
 ونصف قطره البعد الكائن بين نهايتي نصفي المحورين (شكل ٢٩٥)
 لتكن الزاوية م د م قائمة فعلى مقتضى النظرية السابقة تكون زاوية ط د م
 كذلك ويحدث

$$\text{ط م} = \text{ط م} + \text{م د م} \quad \text{أو} \quad \text{أ م} = \text{أ م} + \text{م د م}$$

والبرهنة على ذلك يقال حيث ان مسقطى أى شكل على مستويين متوازيين متساويان فتعتبر
اذن مستوى المسقط مارا بمركز الدائرة ومتوازيا

لمستوى المسقط المعلوم



ليكن $ا ا$ قطر الدائرة وخط تقاطعها
بمستوى المسقط و $ب ب$ القطر العمودى عليه
و $ب ب$ مسقطه فيكون عمودا على $ا ا$
ثم بوضع لاجل الاختصار $ا = ب ب = ا$
و $ب ب = ب$ و $ب ب = ب$ ثم يؤخذ $ب$
 $ب ب = ب ب = ب$ فانا اعتبرنا نقطة ما $م$

من الدائرة وكان $م$ مسقطها ووصلنا $ب$ و $ب$ فانا برهن على أن $ب ب = ب ب + ب ب = ا$
والوصول الى ذلك عند القطر $م ب$ المساوى $ا$ ثم المستقيمتان $ب ب$ و $ب ب$ و $ب ب$
و $ب ب$ ونزل من البورة $ب$ العمود $ب ب$ على $م ب$ ونزل أيضا من نقطة $م$ العمود $م ب$
على $ب ب$ ونصل $م ب$ فالثلثان $م ب ب$ و $ب ب ب$ يكونان متشابهين (٢١٣) ويحدث
 $ب ب = ب ب = ب ب$ واذن يكون $ب ب = ب ب$ ويكون الثلثان القائم الزاوية $ب ب ب$
و $ب ب ب$ متساويين لساواة وترؤضلع من أحدهما لتطيريهما من الثانى وينتج من تساويهما
أن $ب ب = ب ب$

وأما الثلثان القائم الزاوية $م ب ب$ و $ب ب ب$ فهما متساويان أيضا لان فيهما الزاويتين
 $ب ب$ و $ب ب$ متساويان وفيهما الضلعان $م ب$ و $ب ب$ كذلك وينتج من تساويهما أن
 $م ب = ب ب$ ويكون ان $ب ب + ب ب = ب ب = ب ب + ب ب = ا$ وهو المطلوب

نتيجة ١ - البعد $م ب$ يسمى بالاحداثى الرأسى لنقطة $م$ وأما البعد $ب ب$ فيسمى
بالاحداثى الافقى لها وكذا يسمى البعد $م ب$ بالاحداثى الرأسى لنقطة $م$ والبعد $ب ب$
يسمى باحداثىها الافقى وحيث ان تناسب $ب ب = ب ب$ الناتج من المثلثين المتشابهين $م ب ب$
و $ب ب ب$ ثابت لاى نقطة مثل $م$ من القطع الناقص أمكن أن يقال

ان القطع الناقص يمكن استخراجهم من الدائرة بواسطة تغيير احداثياتهم الرأسية على نسبة واحدة
نتيجة ٢ - يمكن أن يستنتج من هذا النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص لانا اذا
تصورنا دوران مستوى القطع الناقص حول المحور $ا ا$ الى أن ينطبق على مستوى الدائرة فلان
المستقيم $م ب$ ينطبق ضرورة على $م ب$ و $ب ب$ على $ب ب$ وهكذا وحيث ان الابعاد

م ل و ب ح و الخ لا تغير في أثناء الدوران وبعده فتكون النسبة السابقة $\frac{الم}{ل} = \frac{ب}{ح}$ ثابتة وبناء عليه يمكن أن يقال

إذا فرض قطع ناقص ودائرة متعددة معه في المركز وقطرهما ساو محورهما الاكبر وأخذت نقطة على محيط كل منهما بحيث تكونان متحدتي المسقط على المحور الاكبر فتكون النسبة بين الاحدائين الرأسى لنقطة القطع الناقص وبين الاحدائين الرأسى لنقطة محيط الدائرة كالنسبة بين نصفي المحورين ب و ا

إذا تقر هذا وأريد رسم القطع الناقص الذى محوره ا ب = ١٢ و ح = ٤٦ = ٢ (شكل ٢٩٨)

فاما نرسم دائرتين متحدتي المركز نصفي القطرين

ا و ب ثم نأخذ نقطة م ا م مثلا على محيط

الدائرة وننزل منها العمود م ل على المحور و ا

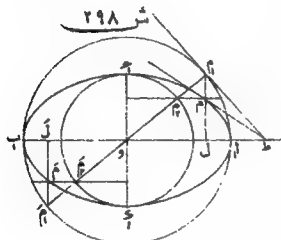
ونصل م و م ثم نأخذ من نقطة م وهي تقاطع

هذا المستقيم الواصل بمحيط الدائرة و ح المستقيم

م م موازيا للمستقيم و ا فنقطة تقاطعه م

بالعمود م ل تكون احدي نقط القطع الناقص

$$\frac{الم}{ل} = \frac{ب}{ح} = \frac{١٢}{٤٦} = \frac{٦}{٢٣}$$



نتيجة ٣ - يمكن استنتاج كثير من خواص القطع الناقص مباشرة من اعتباره كانه مسقط

لمحيط دائرة فمحاس القطع الناقص م ط هو مسقط محاس الدائرة م ط وحينئذ فلايجاد

محاس القطع الناقص يجب وصل نقطة ط بنقطة م

وكذلك لو مد في الدائرة بجهة أو تارة متوازية فيكون محل أو اسط هذه الاوتار قطر الدائرة وعودا

على اتجاهها وحيث ان هذه الاوتار تنسقط في مستقيمت متوازية وأن أنصافها تنسقط في أنصاف

مسافاتها فيكون محل أو تارة متوازية في القطع الناقص هو مستقيم يمر بمركزه

نظريية

(٣٧٦) مساحة القطع الناقص تساوى حاصل ضرب نصفي محوريه في النسبة التقريبية بين

محيط الدائرة وقطره

والبرهنة على ذلك تبدأ أولا بتقويم المساحة السطحية لجزء من القطع الناقص مثل ل د و ح

محصور بين الرأسين د ل و ح وبين المحور (شكل ٢٩٩)

فقول اذا قيمت المسافة ح ل الى جلة أجزا متساوية وأقيم من نقط التقاسيم أعمدة على المحور الاكبر ومدت الى أن تلاقى محط الدائرة الذي

الأكبر وامتدت إلى أن تلاقي محط الدائرة الذي

مركزه و ونصف قطره ا في النقط د م

و ع و ... ثم رسم من النقط م و ع

و م و ع و ه مستقيمات موازية

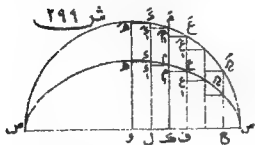
للبحور الاكبر فانه يتكون من ذلك جملتان

من المستطيلات متحدة جميعها في القواعد

أما ارتفاعات الجبل الأولى فهي الأحداثيات

الرأسية للقطع الناقص وأما ارتفاعات المجلة الثانية فهي الاحداثيات الرأسية للدائرة وبناء على

ما تقدم يحدث



$$\frac{1}{1} = \dots = \frac{\text{ك م ع ف}}{\text{ك م ع ف}} = \frac{\text{ل م ك}}{\text{ل م ك}}$$

ثم اذا مرنا بالحرف س مجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء القطع الناقص و س

المجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء الدائرة تحصل $\frac{3}{2} = \frac{3}{1}$ ولما كان هذا التناسب

حقيقيا هما كان عدد الاقسام المنقسم اليها البعد ع ل ف اذا فرضنا ازدياد عدد هذه الاقسام

الى غير نهاية فن المعلوم أن المجموع Σ يقرب قريبا كليا من مساحة جزء القطع الناقص Σ

المطلوب تعيينها وأن المجموع Σ يقرب أيضا قريبا كلياً من مساحة جزء النائرة المناظرة لها Σ'

حينئذ فيكون عند النهاية $\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$

عني، أن نسمة مساحة أي جزء من القطع الناقص، محصور بين احداهين رأسين عمودين على

نحوه الى مساحة الجزء المتناظر له من الدائرة المرسومة على هذا المحور كقطر لها كالنسخة من

صق المحورين وبناء عليه اذا علمت مساحة جزء الدائرة وعلم المحوران تسر مع السهولة تقويم

مساحة الجزء المذكور من القطع الناقص

انقرر هذا يقال اذا فرض تباعد النقطتين ∞ و ϵ عن بعضهما الى أن تنطبقا على النقطتين

س و ص فان جزء القطع الناقص يؤل الى نصفه وجزء الدائرة يؤل أيضا الى نصفه وبناء عليه

کون

$$\frac{1}{\text{اوس}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{طاب}}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\frac{1}{\text{س}}} = 1$$

الفصل الثاني

(في القطع المكافئ)

تعريف

(٣٧٧) القطع المكافئ هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت أيضا (شكل ٣٠٠)

النقطة الثابتة تسمى بؤرة القطع المكافئ والمستقيم الثابت يسمى دليله ويرمز هنا للبؤرة بالرمز s بعد أي نقطة من نقط القطع المكافئ عن البؤرة يسمى نصف قطر بؤري ويرمز له هنا بالحرف $ص$

(٣٧٨) تعريف مماس القطع المكافئ هو عين تعريف مماس القطع الناقص (عمر ٣٦١)

(٣٧٩) العمود الغير المحدود النازل من بؤرة القطع المكافئ على دليله يسمى محوره

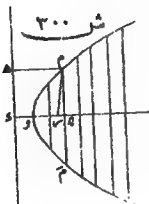
المبحث الاول

(في رسم القطع المكافئ)

عملية

(٣٨٠) المطلوب رسم القطع المكافئ

الطريقة الاولى - وهي طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٠)



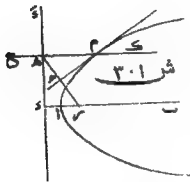
إذا علمت بؤرة المكنى ودليله فإنه ينزل من البؤرة s العمود $ص$ على الدليل المعلوم فتكون $و$ وسط البعد $ص$ إحدى نقط المكنى على مقتضى التعريف (٣٧٧) ثم إذا أخذت نقطة $ما$ على المحور $ص$ وأقيم منها عمود غير محدود وجعلت نقطة $س$ مركزا ورسم محيط دائرة نصف قطرها $سا$ فإنه بقطع العمود المذكور في نقطتين $م$ و $م'$ تكونان من نقط المكنى لان $م ه = ص$ و

$م' ه = ص$

لكنه لاجل أن يقطع محيط الدائرة المذكورة العمود $د$ يجب أن يكون $د > د$ واذن فيجب أن تكون نقطة $د$ على عين نقطة $و$

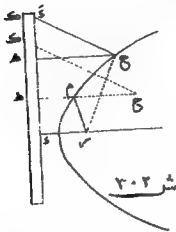
نتيجة - يظهر من طريقة رسم المكنى هذه أنه يمتد الى غير نهاية في الاتجاه $د$ وأنه موجود بتمامه في جهة واحدة من الدليل

الطريقة الثانية - وهي طريقة أخرى لرسم المكنى نقطة فنقطة (شكل ٣٠١)



بتمستقيم كيفما كان $ح$ ك موازيا $د$ ووصل نقطة $د$ بنقطة $هـ$ تقاطع المستقيم $ح$ بالدليل ثم يقام من نقطة $د$ وسط المستقيم $د$ عمود عليه فيقابل $ح$ في نقطة $م$ تكون إحدى نقط المكنى وسيدكر فيما يأتي أن $م$ يكون مماسا للمكنى وحينئذ يكون لهذه الطريقة فائدة أخرى

يؤخذ من طريقة رسم المكنى هذه أولاً أنه يأخذ في التباع عن المحور $د$ الى غير نهاية حيث أن $د$ غير محدود وثانياً أن $م$ يكون أكبر من $\frac{1}{2} د$ واذن فيزداد الى غير نهاية وبذلك يمتد المكنى الى غير نهاية في الاتجاه $د$ الطريقة الثالثة - وهي طريقة رسمه دفعة واحدة (شكل ٣٠٢)



ضع حافة مسطرة بطول الدليل ونطبق أحد ضلعي القائمة من مثلث خشبي $ح$ ك قائم الزاوية على حافة المسطرة كما يظهر ذلك من الشكل ثم يثبت أحد طرفي خيط طوله مساو $ح$ في رأس المثلث $ح$ ويثبت طرفه الآخر في البورة $د$ ثم يزلق المثلث حتى يصير الخيط مشدودا في الاتجاه $د$ فتكون نقطة $ح$ من نقط القطع المكافئ ثم يحرك المثلث بعد ذلك ويشد الخيط بواسطة سن

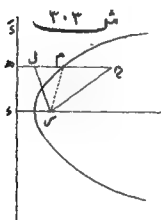
قلم راسم متكافئ $ح$ في رسم قوسا من القطع المكافئ لانه اذا كان $ح$ ك أحد أوضاع المثلث ونقطة $م$ محل سن القلم فيكون $م$ مساويا لطول الخيط ويكون $م = د$ واستعمال هذه الطريقة قليل جدا حيث لا يتوصل بها الا الى منحن صغير قريب من البورة

المبحث الثاني

(في بعض نظريات مهمة)

نظرية

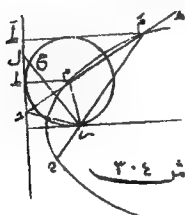
- (٢٨١) كل نقطة مفروضة داخل القطع المكافئ تكون أقرب البؤرة من الدليل وكل نقطة خارجة عنه تكون بعكس ذلك (شكل ٣٠٣)



- الاول - لتكن \odot نقطة داخل القطع المكافئ
- و \odot و \odot بعديهما عن البؤرة وعن الدليل و \odot
- نقطة تقابل \odot بالتعني فيصـ
- $\odot > \odot + \odot$ أو $\odot > \odot + \odot$
- الثاني - لتكن \odot خارجة عنه و \odot و \odot
- بعديهما عن البؤرة والدليل و \odot نقطة تقابل امتداد
- \odot بالتعني فيحصل $\odot < \odot + \odot$ أو $\odot < \odot + \odot$
- وهو المراد

عملية

- (٢٨٢) اذا علم من القطع المكافئ بؤرة ودليله والمطارب تعيين نقط تقاطعه بمستقيم معلوم



- بدون رسم التعني (شكل ٣٠٤)
- يقال نفرض أن المسئلة محولة وأن \odot هي احدى
- نقط تقاطع المستقيم \odot بالتعني وأن \odot نصف
- القطر البؤري لنقطة \odot و \odot العمود النازل منها
- على الدليل فإذا جعلت \odot مركزا ورسم محيط دائرة
- بنصف قطر مساو \odot فإنه يمس الدليل في نقطة \odot
- وإذا نعين نقطة \odot يتوقف على حل المسئلة الآتية

وهي

- * الطالب امرار محيط دائري نقطة معلومة ويكون مماسا مستقيم معلوم ويكون هي كزمو حودا
- * على مستقيم آخر معلوم

- لكأذا يجتمعان نقطة ع المائلة للبورة ، بالنسبة لتقييم المعالم فتكون موجودة
- ضرورة على المحيط المذكور وبنا عليه ف يرجع الامر الى حل المسئلة الاتية وهي

- المطلوب امر محيط دائرة نقطتين معلومتين ويكونان مستقيمين معلوم فانامد $ح$ على
- استقامته الى أن يلاقى الدليل في نقطة $ل$ ويجتمعان الوسط المناسب ل $ط$ بين $ل$ و $ح$ و
- وضعناه بجانب نقطة $ل$ فاناتوصل الى النقطتين $ط$ و $ط'$ ثم انامتجهما مستقيمان
- موازيان للعرض وتحصل نقطتا التقاطع $م$ و $م'$ المطلوبتان

• نتيجة - حيث أنه لا يمكن وجود غير النقطتين ط و ط' فيستنتج من ذلك أن المستقيم
• لا يقابل المحنى في أكثر من نقطتين وبذلك يكون محذوبا

* تنبيه ١ - اذا وقعت نقطة ح على الدليل فان التقطين ط و ط' أو م و م' تعمدان معا وبناء عليه يكون المستقيم هـ مماسا للقطع المكافئ وأما اذا وقعت نقطة

* على شمال الدليل فيدل ذلك على ان المستقيم هـ لا يقابل المحنى
* تنبيه ٢ - اذا وازى المستقيم حـ الدليل فإنه لا يوجد الا محط واحد مان بالنقطتين

* وعلى الدليل وأذن فلا يوجد الانقطة تقاطع واحدة م ثم اذا دار المستقيم حول نقطة م وأخذ في التقرّب شأفاً من أن يكون موازاً للمور فان نقطة ل أو ما تسعة لها

* نقطة ط تتمثل على الدليل وتأخذ في التباعد الى غير نهاية وبناء عليه قبيح نقطة م الى غير نهاية عن المتحني

* تنبيه ٣ - اذا تم المستقيم \mathcal{H} بالبورة فإنه لا يتوصل بالاعمال المتقدمة الى ايجاد

* نقطتي التقاطع غير \mathcal{A} الوصول السهام في هذه الحالة

• نقول (شكل ٣٠٥)

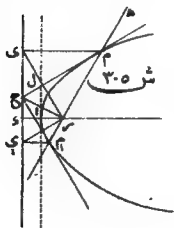
إذا كانت M إحدى نقطة التقاطع أو نقطة

ش ٣٠٥

العمود م على الليليل وجعلت من كراورسم محيط دائرة نصف قطرها من فانه يكون عماسا الليليل

* في نقطة y نأخذ أقبح من نقطة a العمود ac على المحور ax فكون ac أيضا المماس للمحارة

* المذكورة وان يكون $v = c$ ي ونام عليه فانه



- * يسهل تعيين نقطة $ي$ ومنهاتين نقطة $م$ وبأخذ البعد $ح ي = ع ي$ فانها تعين
- * أيضا نقطة $م$ وهي النقطة الثانية لتقاطع المستقيم $ح ه$ بالقطع المكافئ

نظريية

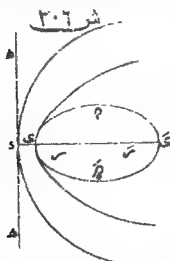
- * (٢٨٣) نصف القطر البوري لنقطة تماس مستقيم بقطع مكافئ عمود على المستقيم الواصل بين البورة ونقطة تلاقي المستقيم المماس بالدليل (شكل ٣٠٤)
- * لكن $م م$ قاطعا للحنى و $ح$ نقطة تقابله بالدليل فاذا أنزل من النقطتين $م$ و $م$ عمودان على الدليل $م ط$ و $م ط$ حدث

$$\frac{٢٤}{٢٢} = \frac{ط م}{ط م} = \frac{ط م}{ط م}$$

- * ومن هنا يعلم أن المستقيم $ح م$ منصف للزاوية $ح م ح$
- * وحينئذا أخذت نقطة $م$ في التقريب شيئا فشيئا من نقطة $م$ الى غير نهاية فان القاطع
- * يقرب من أن يكون مماسا للحنى في نقطة $م$ على مقتضى التعريف وتقريب زاوية $ح م ح$
- * من القائمين أو تقرب زاوية $ح م ح$ من القائمة وهو المطلوب

نظريية

- * (٣٨٤) القطع المكافئ هو النهاية التي يقرب منها قطع ناقص بزاد محوره الاكبر شيئا فشيئا الى غير نهاية بينهما تكون احدى بورتيه والرأس المجاورة لها ثابتتين (شكل ٣٠٦)
- * وللهذه على ذلك يقال ليكن $ي د ي د$
- * قطعاً ناقصاً و $س$ و $س$ بورتيه و $ي ي$
- * محوره الاكبر فاذا رسمت الدائرة الدلييلة للبورة
- * $س$ تكون جميع نقط المكنى على أبعاد متساوية
- * من محيط هذه الدائرة ومن البورة
- * ثم اذا فرض بقاء البورة $س$ والرأس $ي$ ثابتين
- * وفرض ترايد نصف المحور $ا$ الى غير نهاية فان
- * محيط الدائرة الذى قطره $ا$ يأخذ في الكبر
- * شيئا فشيئا الى غير نهاية ويقرب من أن يجمع المماس في نقطة $د$ وبناء عليه فيأخذ القطع



- * الناقص من التقرب الى غير نهاية فهو المحل الذي نقطه متساوية البعد عن البورة γ ومن المستقيم هـ هـ أعني نحو القطع المكافئ الذي بورته γ ودليله هـ هـ وهو المطلوب
- * تنبيه - يجب لادراك هذه النظرية جيداً أن تصور نقطة على القطع الناقص متغيرة وموضوعة على بعد معين من البورة γ فن المعلوم أن وضع هذه النقطة يتغير كلما حصل تكيف في شكل القطع الناقص المتحرك وتقرب الى غير نهاية من إحدى نقط القطع المكافئ الثابت الذي بورته γ ودليله هـ هـ
- * نتيجة - ينتج مما ذكر أن جميع خواص القطع المكافئ يمكن استنتاجها من الخواص المناظرة لها من القطع الناقص بناء على الاعتبار المتقدم

المبحث الثالث

في تماس القطع المكافئ

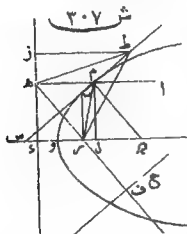
نظرية

- * (٣٨٥) مماس القطع المكافئ نصف الزاوية الواقعة بين نصف القطر البوري لنقطة التماس والمستقيم المار بنقطة التماس موازياً للمحور (شكل ٣٠٥)
- * أعني ان المماس م ح ينصف الزاوية $\gamma \text{ م ي}$
- * وللبهنة على ذلك يقال حيث ان زاوية $\gamma \text{ م ح}$ قائمة (٣٨٣) يكون الثلثان القائم
- * الزاوية $\gamma \text{ م ح}$ و $\gamma \text{ م ي}$ متساويين لان فيهما الوتر م ح مشترك بينهما والضلع $\gamma \text{ ح} = \gamma \text{ ي}$ وتكون زاوية $\gamma \text{ م ح} = \gamma \text{ م ي}$ وهو المراد
- * نتيجة ١ - انا أريد بمماس للقطع المكافئ من نقطة عليه يكفي أن يرسم نصف القطر البوري لها ويؤتمتها مستقيماً موازياً المحور ثم تنصف الزاوية الحادة بينهما
- * نتيجة ٢ - اذا وصل المستقيم $\gamma \text{ ي}$ فن حيث ان كل واحدة من النقطتين م و ح على بعدين متساويين من نهاية هذا المستقيم تكونان موجودتين على العمود القائم على وسطه واذا فتكون نقطة ل مسقط البورة γ على المماس م ح وهي وسطى γ وحيث ان نقطة ا وسط البعد $\gamma \text{ د}$ أمكن أن يقال ان محل مساقط البورة على المماس هو العمود القائم على المحور من رأس المنحنى

- * نتيجة ٣ - إذا أخذت نقطة م في التقرب شيئاً فشيئاً من نقطة أ فإن زاوية م ح س تقرب من القائمتين ويقرب المستقيم المنصف م ح من أن يكون عموداً على المحور وأذن فيكون مماساً للمتحني في رأسه عموداً على المحور
- * نتيجة ٤ - يسهل مشاهدة تساوي الأبعاد ح س و ح ي و ح ي على الشكل وقيام الزاوية م ح م وأذن فحل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على القطع المكافئ هو الحل

نظريّة

- * (٣٨٦) تخت العمود (الرأس) في القطع المكافئ كمية ثابتة ومساوية نصف القطر البوري العمودى على المحور (شكل ٣٠٧)



- * إذا مد من نقطة م إحدى نقط القطع المكافئ مماساً له م س وأزل منها العمود م ل على المحور وأقيم م ح عموداً على المماس ومدحتى يلاقى المحور في نقطة ح فيكون البعد ل ح هو ما يسمى بنخت العمود (الرأس) ثم إذا وصل م س وأزل م ه عموداً على النليل ووصل م ه فيكون هذا المستقيم عموداً على المماس بناء على النظرية السابقة وأذن فيكون موازياً للعمود المتحنى م ح وبناء عليه يكون الشكل م ه م ح متوازياً أضلاع ويحدث

$$* \quad م ه م ح = م ه = ل ح \quad \text{أو} \quad م ه م ح = م ه - م ل = ل ح \quad \text{أو} \quad م ه م ح = م ه$$

- * ويرمز عادة لهذا البعد م ه بالحرف ح ويكون نخت العمود = ح وأما ما سواها البعد م س بالاحداثى الرأسى م س المقابل للبؤرة أ أو لوتر البورى فهو ظاهر وبذلك ثبت المطلوب

نظريّة

- * (٣٨٧) نخت المماس في القطع المكافئ يساوى ضعف الاحداثى الأفقى لنقطة التماس (شكل ٣٠٧)

- * الاحداثى الأفقى لاى نقطة مثل م هو البعد ول المحصور بين رأس المتحنى و وبين

- بواسطة تقابل م ه بالعمود ل م التازل من نقطة ل على س ه
- ولتعيين نقطة ه يقال حيث ان ل ه = ل س بناء على ما تقرر (بنقرة ٣٨٥ نتيجة ٤)
- فتؤخذ نقطة ه بناء على ذلك في تقابل الدليل بمحيط الدائرة الذي مركزه ل ونصف قطره
- ل س لكنه لما كان محيط الدائرة يقابل الدليل عموما في نقطتين ه و ه' فيكون للسلسلة
- اذن على وجه العموم حلان ل م و ل م'
- تنبيه - لاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب ويكفي أن يقابل محيط الدائرة الدليل وهذا
- يستلزم أن يكون بعد نقطة ل عن البورتا كبر من بعدها عن الدليل أعني انها تكون خارجة
- عن المخني وأما اذا وجدت عليه فان الدائرة ل س تكون مماسة للدليل وبذا يؤول الحلان
- الى واحد

عملية

- (٣٩٠) المطلوب مد مماس للقطع المكافئ يكون موازيا لاتجاه معلوم (شكل ٣٠٧)
- ليكن ع ي الاتجاه المعلوم ونفرض ان المسئلة محولة وان م ط هو المماس المطلوب
- اذن البحث عن نقطة التماس م
- فإذا أثرنا من نقطة م العمود م ه على الدليل كانت معرفة نقطة ه كافية لتعيين نقطة
- م على مقتضى خواص المماس المقررة وللوصول الى ذلك يقال
- اذا وصل س ه كان هذا المستقيم عمودا على المماس أو على الاتجاه المعلوم وبناء عليه فانه
- يكفي لتعيين نقطة ه أن ينزل من نقطة س عمود على الاتجاه المعلوم ويمسح حتى يلاقى الدليل
- تنبيه - اذا تغير وضع الاتجاه ع وأخذ شيا فشيا الى غير نهاية في القرب من أن يكون
- موازيا للجور فان نقطة ه تباعد عن الدليل الى غير نهاية وكذا تباعد نقطة ل عن
- مماس رأس المخني الى غير نهاية وأما نقطة م فانها تباعد عن المخني الى غير نهاية أيضا
- فإذا صار ع موازيا للجور فان نقطة ه تنعدم ولا يكون للمخني مماس أو يكون مماسه
- موحودا على بعد لانها في

الفصل الثالث

(في القطع الزائد)

تعريف

(٣٩١) القطع الزائد هو محل النقط التي يكون الفرق بين بعدى كل واحدة منها عن نقطتين ثابتتين فيه ثابتاً دائماً (شكل ٣٠٩)

النقطتان الثابتتان تسميان بوري القطع الزائد ويرمز لهما بالرمزين \mathcal{S} و \mathcal{S}' بعد أي نقطة من نقط المحل عن أي واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بوري ويرمز لنصفي القطرين البوريين لأي نقطة بالمحرفين \mathcal{V} و \mathcal{V}' ويرمز للفرق الثابت بين نصفي القطرين البوريين لأي نقطة بالمقدار \mathcal{A} وأما البعدين البوريين فيرمز بهما بالمقدار \mathcal{B} و \mathcal{B}' (٣٩٢) تعريف مماس القطع الزائد هو عين تعريف مماس القطع الناقص

المبحث الاول

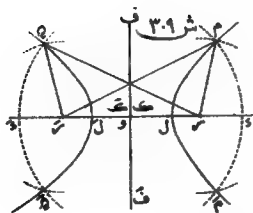
(في رسم القطع الزائد)

عملية

(٣٩٣) المطلوب رسم القطع الزائد

الطريقة الاولى - وهي طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٩)

لتكن \mathcal{S} و \mathcal{S}' بوري القطع الزائد وليكن \mathcal{B} و \mathcal{B}' البعد الكائنينهما و \mathcal{A} الفرق الثابت المعلوم الذي يجب أن يكون أقل من \mathcal{B} لان الضلع $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ أو \mathcal{B} من المثلث $\mathcal{S}\mathcal{S}'\mathcal{M}$ أكبر من الفرق بين الضلعين الآخرين $\mathcal{M}\mathcal{S} - \mathcal{M}\mathcal{S}'$ أو أكبر من \mathcal{A} فإذا أخذ على المستقيم $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ كل واحد من البعدين $\mathcal{S}\mathcal{K}$ و $\mathcal{S}'\mathcal{K}'$ و \mathcal{A} ونصف كل واحد من $\mathcal{S}\mathcal{K}$ و $\mathcal{S}'\mathcal{K}'$



فأنا نتوصل الى نقطتي \mathcal{L} و \mathcal{L}' من نقط المثلثي وذلك لان

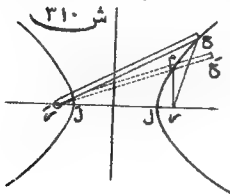
لـ \bar{s} - لـ \bar{s} = لـ \bar{s} = كـ \bar{s} = ١٢ و لـ \bar{s} - لـ \bar{s} = لـ \bar{s} = كـ \bar{s} = ١٢
 ثم إذا فرضت نقطة مثل \bar{s} على عين نقطة \bar{l} وجعلت نقطة \bar{s} مركزا ورسم محيط دائرة
 بنصف قطر مساو \bar{s} كـ ثم جعلت بعد ذلك \bar{s} مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو
 \bar{s} - ١٢ = كـ فانه يقطع الاول في النقطتين \bar{m} و \bar{m} وتكونان من نقط المكنى لان
 \bar{m} - \bar{s} = \bar{s} - كـ = ١٢
 ثم اذا غيرنا نصفي القطرين بعضهما وركزنا في البورتين ورسمنا محيطي دائرتين آخريين فانا نتوصل
 الى نقطتين جديدتين \bar{d} و \bar{d}

نتيجه - لاجل ان يتقاطع محيطا الدائرتين يجب ويكفي أن يكون

$$\text{أولا } \bar{s} > \bar{s} + \bar{s} \text{ كـ وثانيا } \bar{s} < \bar{s} - \bar{s} \text{ كـ}$$

ومن ذلك يشاهد أن هذين الشرطين لا يتحققان الا اذا كانت نقطة \bar{s} على عين نقطة \bar{l} وأما
 اذا انطبقت نقطة \bar{s} على \bar{l} فان المحيطين يتماسان وبذلك يتحدد نقطتا \bar{m} و \bar{m} معاني نقطة \bar{l}
 نتيجة ١ - ينبج محاذ كـ أن محوري تعادل نقط المكنى هما \bar{s} والمستقيم \bar{f}
 العمودي عليهما والمار بنقطة وسط \bar{s}

نتيجة ٢ - حيث ان البعد \bar{s} ل هو النهاية الصغرى للابعد \bar{s} فيتركب المحل اذا أولا
 من قسم ذي فرعين لانهايين متمائلين الى الوضع بالنسبة للمستقيم \bar{s} وموضوعين على عين \bar{f}
 ثم انه بتغيير نصفي القطرين يتوصل ثانيا الى قسم آخر موضوع على شمال \bar{f} ومماثل
 للاول وبناء عليه فيتركب المحل من جزأين خارجين عن المسافة المحصورة بين العمودين المقامين
 على \bar{s} من نقطتي \bar{l} و \bar{l}



نتيجة ٣ - حيثان نقطة و مركزا تائل
 قسمي لهذا السبب بمركز المكنى

الطريقة الثانية - وهي طريقة روجه دفعة
 واحدة (شكل ٣١٠)

اذا تصورنا نهاية مسطرة يدور حول البورة \bar{s}
 وربطنا في النهاية الثانية \bar{c} لها محيطا ينقص
 طولها عن طول المسطرة بالمقدار الثابت ١٢ وثبتنا
 طرفها الثاني في البورة \bar{s} ثم أدركنا المسطرة حول

البورة \mathcal{S} وشدنا الخيط بسن قلم راسم \mathcal{M} مع انطباقه دائماً على المسطرة فانه يرسم قوساً من منحنى القطع الزائد لان

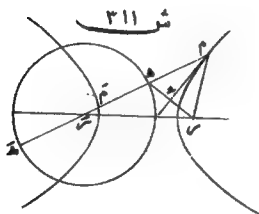
$$١٢ = \mathcal{S}\mathcal{E} - \mathcal{S}\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}\mathcal{M} + \mathcal{S}\mathcal{M}) - \mathcal{Z}\mathcal{M} = \mathcal{S}\mathcal{M} - \mathcal{S}\mathcal{M}$$

المبحث الثاني

(في بعض نظريات مهمة)

نظرية

*(٢٩٤) القطع الزائد هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن محيط دائرة ثابتة أيضاً (شكل ٣١١)



* لتكن \mathcal{S} و \mathcal{S} يورق القطع الزائد و \mathcal{H}
 * محيط الدائرة الثابت الذي مركزه \mathcal{M} ونصف
 * قطره ١٢ فإذا كانت \mathcal{M} إحدى نقط القطع
 * الزائد فحصل بناء على التعريف أن
 * $\mathcal{M}\mathcal{S} - \mathcal{M}\mathcal{H} = ١٢$ لكن $\mathcal{M}\mathcal{S} - \mathcal{M}\mathcal{H} = ١٢$
 * فيكون $\mathcal{M}\mathcal{S} = \mathcal{M}\mathcal{H}$ واذن فتكون نقطة \mathcal{M}
 * على بعدين متساويين من البورة \mathcal{S} ومن محيط
 * الدائرة \mathcal{S} \mathcal{H}

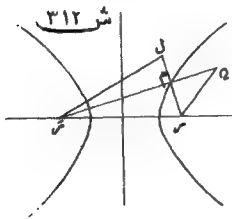
* وأما نقط الفرع الثاني فهي محققة أيضاً لهذه الخاصية وذلك لانه اذا كانت \mathcal{M} إحدى
 * نقط هذا الفرع فحصل $\mathcal{M}\mathcal{S} - \mathcal{M}\mathcal{H} = ١٢$ وحيث ان
 * $\mathcal{M}\mathcal{H} - \mathcal{M}\mathcal{S} = ١٢$ يكون $\mathcal{M}\mathcal{S} = \mathcal{M}\mathcal{H}$
 * الدائرة \mathcal{S} \mathcal{H} تسمى بالدائرة الدليلة للبورة \mathcal{S}

* تنبيه - يظهر من هذه النظرية ما بين القطع الناقص والقطع الزائد من قوة الارتباط
 * واذا فيمكن اعتبار هذين المنحنيين كأنهما حالتان خصوصيتان لمحل واحد فالقطع الناقص
 * يقابل الحالة التي تكون فيها \mathcal{S} داخل الدائرة الدليلة التي مركزها \mathcal{S} وأما القطع الزائد
 * فانه يقابل الحالة التي تكون فيها \mathcal{S} خارجة عنها

- * تبصيرة - يمكن أن يستنتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الزائد ويكون لها منزلة أخرى وهي تعيين المماس $م$ للنقطة المفروضة

نظرية

- * (٢٩٥) كل نقطة تفترض داخل القطع الزائد يكون الفرق بين نصفي قطريها البورين أكبر من المحور المقاطع وكل نقطة تفترض خارجة عنه يكون الفرق بين نصفي قطريها البورين أقل من المحور المذكور (شكل ٣١٢)
- * فربما القطع الزائد يقسمان المستوى الى ثلاثة أقسام فيقال لأي نقطة أنها داخل القطع الزائد متى وجدت مع إحدى البورتين في قسم منها ويقال لها خارجة عنه إذا لم يكن الأمر كذلك



- * أولاً - لنكن $د$ داخل القطع الزائد فنصل $د$ بـ $ص$ و $د$ بـ $م$ و $ص$ بـ $م$ فيحدث
- * $دص < م + ص$ وان كان يكون
- * $دص < م + ص$ أو $دص < م + ص$ ومن ذلك يمكن أن يستنتج أن
- * $دص < م - ص$ أو $دص < م - ص$
- * ثانياً - إذا كانت $ل$ خارجة فنصل $ل$ بـ $ص$ و $ل$ بـ $م$ فيحدث
- * $لد > م + ص$ أو $لد > م + ص$ أو $لد > م + ص$
- * ومن ذلك يتبع أن $لد > م - ص$ أو $لد > م - ص$ وهو المطلوب

عملية

- * (٢٩٦) المطلوب إيجاد نقط تقاطع مستقيم معنقى قطع زائدين رسم المعنقى
- * ليسكن المعلوم من القطع الزائد بورتبه $ص$ و $ص$ والفرق الثابت $ا$ والمستقيم المعلوم

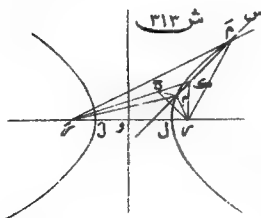
- * فلذا فرضنا ان المسئلة محاولة وان م هي احدى نقط تقابل المستقيم م م بالثمنين
- * ثم ركنا في نقطة م ورسمنا الدائرة الدليلة لبورة م وركنا أيضا في نقطة م ورسمنا محيط
- * دائرة بنصف قطرها م م فيكون مماسا للمحيط الاول (٣٩٤) وبناء عليه فقد رسمنا
- * الى عين الاعمال التي اجريت في مثل هذه المسئلة في القطع ناقص
- * نتيجة - المستقيم لا يمكنه أن يقابل القطع الزائد في أكثر من نقطتين وبذلك يكون المسمى
- * محسوبا

المبحث الثالث

(في عمل القطع الزائد)

نظريّة

- * (٣٩٧) مماس القطع الزائد في أي نقطة ينصف الزاوية المكوّنة من نصفي القطرين
- * البوريين لهذه النقطة (شكل ٣١٣)



- * اذا كانت م احدى نقط القطع الزائد
- * واعتبرنا القاطع م م م المار بهذه النقطة
- * وبأخرى م م قريبة جدا من الاولى فعلى
- * مقتضى الفرض يكون
- * $م م - م م = م م - م م$ و $م م = م م$
- * فاذا عيننا نقطة ح المماثلة للبورة م بالنسبة
- * للقاطع ووصلنا بينهما وبين م بمستقيم
- * ومددناه حتى يقابل القاطع في نقطة ك فتكون هذه النقطة مماسة بالاقل عن واحد من
- * النقطتين م و م ولكن عن م مثلا فيحدث

$$م م - م م = م م - م م \text{ أو } م م - م م < م م - م م \text{ أو } م م < م م$$

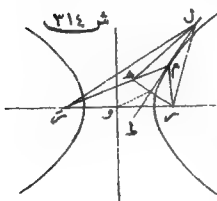
- * واذن تكون نقطة ك داخله القطع الزائد ومماثلة عن النقطتين م و م وبموضوعة
- * على الوتر الجامع لهما وغير ذلك يشاهد أن القاطع منصف للزاوية المكوّنة بين نصفي القطرين
- * البوريين ك م و ك م

- * إذا تقر هذا وفرضنا أن نقطة مَ تقرب سبأ فشيأ إلى غير نهاية من نقطة م فإن نقطة
 * ك تقرب أيضا فحوم وأما ك س و ك س فإنهما في نهاية بان ينطبقا على نصف القطرين
 * البوريين م س و م س وبناء عليه تكون نهاية القاطع م م هو المستقيم المنتصف
 * للزاوية س م س وهو المطلوب

علاء

- * (٣٩٨) المطاوب مدماس للقطع الزائغ من نقطة مفروضة عليه (شكل ٣١٤)

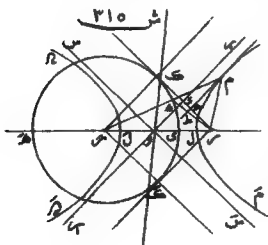
- * تكون م نقطة مفروضة على القطع الزائد
* ولكن م و س جورتيه ولكن م أ المحور
القاطع فمعدن صفي القطر ين البورين م س و
م س ثناخذ على م س البعد م ه = م س
ونزل من نقطة م العمود م ط على ه س
فيكون منصفاً للزاوية م س ه وحينئذ
يكون مماساً للقطع الزائد على مقتضى
النظرية السابقة



- * نتيجة - مماس القطع الزائد يوجد بمماسهين فرعي المنحنى
 * وذلك لأنه إذا كانت ل نقطة مآ من هذا المماس مغايرة لنقطة م فصل بينها وبين النقط
 * s و h و s بمسقيمان فيحدث أن $ل - s = ل - s = ل - s$ و $h > s$
 * أو $h > s$ وإذا فتكون نقطة ل خارجة عن القطع الزائد وهو المطلوب

- ونجست الآن عن الوضع النهائي لممس القطع الرائد متى انتقلت نقطة تماسه على المنحنى
• وأخذت في التماسه الى غير نهاية (شكل ٣١٥)

- * لتكن م نقطة من القطع الزائد فترسم الدائرة
- * الدائرية للبوقة م ، وعند نصفي القطرين
- * البوريين م' و م'' ، ولتكن ه نقطة
- * تقابل م' م'' بمخفي الدائرة فالعمود م ط
- * النازل على ه ، يكون مماسا للقطع الزائد
- * في نقطة م ثم عند من نقطة م المماسين
- * م' م'' م' م'' ك ك' لمحيط الدائرة الدائرية



* أولاً - اذا كان وضع النقطة هـ في y على المستقيم xx' تكون نقطة م في الوضع ل

* ويكون المباس عمودا على SS'

* ثانياً - اذا سارت نقطة ه نحو ك فان نقطة م تصعد على منحنى القطع الرائد

* ويصنع المماس زاوية حادة مع المحور ss'

* ثالثاً - اذا قربت نقطة هـ من أن تتحدد نقطة كـ فان هـ يقرب من أن يكون

* عمود اعلیٰ ۱۰ھ و حیث حفظ المود المقام علی وسط ۱۰ھ یقرب نحو و الموازی الی

* رَكَ وَاذْنَقْبَعْدَنْقَطَةُالتَّمَّاسْعَنْالْمُخْنَىإِلَىغَرْمِهَاءَ

* وبالعكس إذا أخذت نقطة التماس في التباعده عن المنحنى الى غير نهاية يكون الوضع النهائي

* للماس هو المستقيم ، الذي يمر بالمركز ولا يقابل المنحنى ويسمى هذا المستقيم الشاهر

• ملخص التقرير للنهي

• يظهر من تماثل المنحني أن ψ امتداد المستقيم و ϕ هو خط تقري وان المستقيم ψ و ϕ

• المماثل للمستقيم و، بالنسبة للحدود هو خط آخر تقريبي

* يؤخذ من المثلث $ود$ أن $ود = \frac{1}{r} ك = 1 = ول$

* وهذه الملاحظة تنوّل به الرسم الخطي التقريرين لقطع زائد معلوم مع السهولة

علمية

* (٣٩٩) المطلوب مدعما للقطع الزائد من نقطة خارجة عنه (شكل ٣١٦)

• لتكن L النقطة المعلومة بين فرعي المنحنى

* فنفرض ان المسئلة محولة وان لم هو

المماس المطلوب فيأزم البحث عن نقطة

● التماس م

• ولذلك يقال إذا رسمنا الدائرة الدلالية للمعورة •

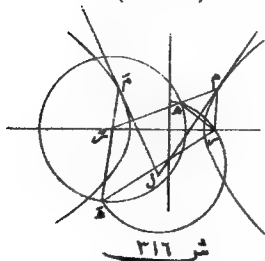
وكانت هـ نقطة تقابل محط هذه الدائرة

● نصف القطر المورى r من المعالوم ان

● نقطة م تتعن اذا علم وضع نقطة ه لكنه

* حيث كان $L = L^*$ تكون نقطة H موجودة في تقابل محيط الدائرة العجلة بالدائرة

• التي مركزها ل ونصف قطرها ل،



* وهاتان الدائرتان تقاطعان عموماً في نقطتين هـ و هـ فيكون إذن للسئلة حلان
لـ م و لـ م

* تنبيه - لاجل أن تقبل المسئلة هذين الحلين يجب وبكفي تقاطع محيطي هاتين الدائرتين
وهذا يستلزم أن يكون البعدين المركزين لـ هـ أقل من مجموع نصفي القطرين ١٢ و لـ هـ
وأكبر من فاصلهما

* أولاً - إذا كانت لـ من فرعي المنحنى وليست على المستقيم هـ هـ فإن النقط الثلاثة
لـ و هـ و هـ يشكون عنهما مثلث يحدث منه أن

$$(١) \quad لـ هـ + لـ هـ < ١٢ < ١٢$$

* فإذا كان لـ هـ أقل من لـ هـ مع وجود نقطة لـ خارجة تحدث

$$(٢) \quad لـ هـ - لـ هـ > ١٢$$

$$(٣) \quad لـ هـ > لـ هـ + ١٢$$

* وإذا كان لـ هـ أكبر من لـ هـ بفرض أن نقطة لـ خارجة تحدث

$$(٤) \quad لـ هـ - لـ هـ > ١٢$$

$$(٥) \quad لـ هـ > لـ هـ + ١٢$$

* ينتج من الارتباطات (١) و (٢) و (٣) أن لـ هـ أصغر من مجموع نصفي القطرين
وأكبر من فاصلهما

* و ينتج ما ذكر أيضاً من الارتباطات (١) و (٤) و (٥)

* ثانياً - إذا كانت لـ موجودة على هـ هـ بين رأسى المنحنى فإن الارتباطات (١) و (٢)

* و (٣) و (٤) و (٥) تتحقق وتقبل المسئلة حلين

* ثالثاً - إذا كانت نقطة لـ على المنحنى يتحصل لـ هـ = لـ هـ + ١٢ و حينئذ يتماس

* الدائرتان وبذلك يتحدد المماسان معا

* رابعاً - إذا وجدت نقطة لـ على أحد الخطين التقريبيين فإن أحد المماسين ينطبق على

* هذا الخط التقريبي وتكون نقطة التماس على بعدلانهاى

* خامساً - إذا انطبقت نقطة لـ على مركز المنحنى فإن المماسين ينطبقان على الخطين

* التقريبيين

* سادساً - إذا وجدت نقطة لـ داخل المنحنى وفي جهة واحدة مع البورة هـ حدث

* لـ هـ - لـ هـ > ١٢ و حينئذ يكون المحيطان متباعدين وبذلك لا يكون للسئلة حلول

• لیکن ول الاتحیاء المعالوم کا سنائی الزامیہ

• فإذا فرض أن المسئلة محمولة وأن m ط هو

• المماس المطلوب فنحن نضع القطرين البورين

* م م و م ، نقطة م ونرسم الدائرة الدلية

• البورة ، فتكون نقطة هـ وهي تقابل

• الدائرة الدليلة بنصف القطر البورى م

• مماثلة لنقطة r بالنسبة للعاص وحينئذ

• فيكون تعيين هذه النقطة كافيا لحل المسألة

• ولتعينها يقال حيث ان رء عمود على المماس فيكون عموداً أيضاً على موازيه ول واذن

• فتبين نقطة هـ بتقاطع الدائرة الدليلة للبورة ، مع العمود النازل من نقطة ، على

• الاتجاه المعالوم

• وحيث ان هذين المحلين تقاطعان عموما في نقطتين فيكون اذن على وجه العموم المسئلة

حلان طم و طم

• تنبيه - اذا فرضنا أن الاتجاه المعلوم ول دور حول نقطة و ليقرب من الخط التقريبي

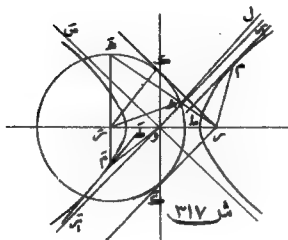
وہ فان المود، والحلین م ط و م ط یقریان نحو الخط التفری

• وإذا استمر ول في دوراته وأخذ الوضع وم فإن العمود المنزل من نقطة س على ول

• لا يقابل الدائرة العالمية وذلك لانكون للمسئلة حلول

• وينتج من هذه المناقشة أن الاتجاه، ول يجب أن يكون محصوراً في زاوية الخطين المتقاربين

سے وہ

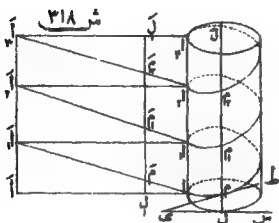


الفصل الرابع

(في المبنى البرمى)

تعريف

(٤.١) المبنى البرمى هو المتولد من تحرك نقطة على سطح اسطوانى متحرك بحيث يكون بعدها عن قاعدتها مناسبا للقوس المحصورين الوضع الابتدائى للرأس وبين وضعه المار بها



فإذا تصورنا تحرك النقطة م مثلاً على سطح اسطوانى متحرك (شكل ٣١٨) وكان بعدها في كل لحظة عن قاعدة الاسطوانة م مثلاً مناسبا للقوس ال المحصورين الوضع الابتدائى للرأس وبين وضعه المار بنقطة م المتحركة فإن المبنى المتولد من ذلك يسمى مضمناً برمياً

ومن المعلوم أنه متى وصلت النقطة المتحركة م الى الوضع الابتدائى للرأس في نقطة أ فإن النقطة ل

تكون قد أتمت مرورها على محيط دائرة القاعدة ويسمى البعد م بالاحداثى الرأسى للنقطة المتحركة في الوضع م وأما البعد أ فيسمى بخطوة البرمى وأما قوس المبنى البرمى المحصور بين نقطة أ ونقطة ب فيسمى بلفحة المبنى البرمى

ثم إذا جعل س رمزاً لنصف قطر قاعدة الاسطوانة و ع للاحداثى الرأسى للنقطة المتحركة و هـ للقوس أ ل و ح خطوة البرمى تحصل على مقتضى التعريف

$$\frac{ع}{ح} = \frac{هـ}{ح} \quad \text{ومنه} \quad ع = \frac{هـ}{ح} \times ح$$

نظريّة

(٤.٢) يمكن اعتبار المبنى البرمى كأنه متولد من مستقيم موجود في مستوى يلف على اسطوانة (شكل ٣١٨)

فلذلك يمد مستويا بالراسم α ويرسم عليه المستطيل $\alpha\beta\gamma\delta$ بحيث تكون قاعدته مساوية لطول محيط دائرة قاعدة الاسطوانة ثم تقسم الارتفاع $\alpha\beta$ الى اربعة اقسام متساوية ثلاثة مثلا ونجد المستقيمين $\alpha\gamma$ و $\alpha\delta$ موازيين للقاعدة ونصل الاقطار $\beta\gamma$ و $\beta\delta$ و $\alpha\gamma$ و $\alpha\delta$ ثم نجد مستقيما $\alpha\epsilon$ موازيا الى $\alpha\beta$ وقاطعا للاقطار في النقط γ و δ و ϵ فيصنع

$$\frac{\alpha\epsilon}{\alpha\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\delta} \quad \text{واذن يكون} \quad \frac{\alpha\epsilon}{\alpha\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\delta} \times \frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma}$$

وحينئذ يكون $\alpha\epsilon$ احد انواراسيا المحن برعي يكون $\alpha\epsilon$ خطوقله لان $\alpha\epsilon$ يدل على قوس من محيط القاعدة وبناء عليه اذا التف المستطيل $\alpha\beta\gamma\delta$ على الاسطوانة فان المستقيم $\alpha\epsilon$ يلتف على محيط القاعدة والمستطيل على السطح الجانبي للاسطوانة والقطر $\alpha\beta$ يلتف على لفة البريمة $\alpha\epsilon$ حيث ان احدى نقطه هذا القطر ϵ تنطبق على نقطة مناظرة لها من لفة البريمة وأما باقي الاقطار فانها تتم المحن

نظـرية

- * (٤٠٣) الزاوية التي يصنعها راس المحن البرعي مع راس الاسطوانة ثابتة دائما (شكل ٣١٨)
- * وللهذه على ذلك نفرض نقطة α قريبة جدا من نقطة ϵ وليكن $\alpha\epsilon$ احد انواراسيا المحن البرعي
- * الراسي فالمستقيمان $\alpha\epsilon$ و $\alpha\delta$ يتقاطعان في نقطة γ ويكون

$$\frac{\alpha\epsilon}{\alpha\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\delta} = \frac{\alpha\epsilon}{\alpha\gamma}$$

$$\frac{\alpha\epsilon}{\alpha\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\delta} = \frac{\alpha\epsilon}{\alpha\gamma} \quad \text{واذن يكون}$$

- * فلذا قرنت $\alpha\epsilon$ من α فان النسبة بين الوتر وقوسه تقرب من الوحدة وبناء عليه يكون
- * نهاية $\alpha\epsilon$ = $\alpha\delta$ = قوس $\alpha\delta$

- * وانخط $\alpha\delta$ يسمى تحت المماس وحينئذ فيكون تحت المماس لاي نقطة من منحن برعي مساويا لقوس القاعدة المقابل لهذه النقطة

- * فانا أخذ على المستطيل $\alpha\beta\gamma\delta$ البعد $\alpha\beta = \alpha\delta$ يكون الاحدان الراسي $\alpha\epsilon$ مساويا $\alpha\delta$ واذن فيكون المثلث $\alpha\epsilon\delta$ مساويا للمثلث $\alpha\delta\epsilon$ وينتج عليه فيصنع
- * المماس زاوية ثابتة $\alpha\epsilon\delta$ مع الراسم وهو المراد

- * تنبيه - مآذ كراه يتوقف على أن النسبة بين قوس ووزنه تكون نهايتها الواحدة متى صغر
- * القوس وأخفى القرب من الصغر

الفصل الخامس

تمرينات

- ١ - المطلوب رسم القطع الناقص إذا علم منه
 - * أولا - البورة ومماسان واحد نقطه
 - * ثانيا - البورة ومماسان واحد نقطتي التماس
 - * ثالثا - البورة ومماس واحد ونقطة تماسه واحد نقطه المعنى
 - * رابعا - البورة ورأس ونقطة من نقطه
 - * خامسا - البورة وثلاث نقط من نقطه
- ٢ - المطلوب رسم القطع المكافئ إذا علم منه
 - * أولا - البورة ومماسان
 - * ثانيا - الدليل ومماسان
 - * ثالثا - البورة ومماس ونقطة تماسه
 - * رابعا - الدليل ومماس ونقطة تماسه
 - * خامسا - البورة ومماس واحد نقطه المعنى
 - * سادسا - الدليل ومماس واحد نقطه المعنى
 - * سابعا - البورة ونقطتان من نقطه المعنى
 - * ثامنا - الدليل ونقطتان من نقطه المعنى
- ٣ - المطلوب معرفة المحل الذي ترسمه احدى نقطه مستقيم ذي طول ثابت تغزلق نهايتاه على
 - * ضلعي زاوية قائمه

(فهرست الجزء الرابع من كتاب الصفة البنية)

صفحة	صفحة
٢٨	٣ الجزء الرابع في الاجسام المستديرة
٣١	والقطاعات المخروطية والمنحنى البري
٣٦	٣ الباب الاول في الاجسام المستديرة
٤٠	٣ الفصل الاول في الاسطوانة
٤٠	٦ الفصل الثاني في المخروط
٤٢	١١ الفصل الثالث في بعض سطوح واجسام
٤٥	دورانية *
٤٩	١٨ الفصل الرابع في الكرة
٤٩	٢٣ الفصل الخامس تمرينات
٥١	٢٥ الباب الثاني في القطاعات المخروطية
٥٢	والمنحنى البري
٥٨	٢٥ الفصل الاول في القطع الناقص
٦٠	٢٥ المبحث الاول في رسم القطع الناقص

(تمت الفهرست)

Bibliotheca Alexandrina



0519742